وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الشمالية
المعهد التقني/ الموصل

الحقيبة التعليمية

القسم العلمي: تقنيات الموارد المائية

اسم المقرر: الرياضيات

المرحلة / المستوى: الاول

الفصل الدراسي: الاول

السنة الدراسية: 2024 - 2025

معلومات عامة

اسم المقرر:	الرياضيات
القسم:	تقنيات الموارد المائية
الكلية:	المعهد التقني الموصل
المرحلة / المستوى	الاول
الفصل الدراسي:	الاول
عدد الساعات الاسبوعية:	نظري 2 عملي
عدد الوحدات الدراسية:	2
الرمز:	TIMO110
نوع المادة	نظري ✓ عملي كلهما
هل يتوفر نظير للمقرر في الاقسام الاخرى	نعم
اسم المقرر النظير	الرياضيات
القسم	جميع الأقسام التكنلوجية
رمز المقرر النظير	TIMO110
معلومات تدريسي المادة	
اسم مدرس (مدرسي المقرر):	الاء عماد حميد
اللقب العلمي:	مدرس
سنة الحصول على اللقب	
الشهادة :	ماجستير
سنة الحصول على الشهادة	
عدد سنوات الخبرة (تدريس)	13

الوصف العام للمقرر

تطوير إمكانية الطالب في استخدام الرياضيات في التطبيقات العملية والاستفادة منها في الدروس التقنية الأخرى وتعليم الطالب الطرق المختلفة في تمثيل المعادلات والقوانين الرياضية في مجالات الحاسوب

الاهداف العامة

- اكتساب فهم شامل للمفاهيم الأساسية في الرياضيات، مثل الأعداد، والعمليات الحسابية، والجبر، والهندسة، والإحصاء.
- **تطوير مهارات حل المشكلات:**
- تحسين القدرة على حل المشكلات الرياضية بطرق منطقية ومنهجية.
- تطبيق تقنيات وأدوات الرياضيات لحل مسائل معقدة في سياقات متنوعة.
- **اكتساب مهارات التفكير التحليلي:**
- تنمية القدرة على التفكير النقدي والتحليلي باستخدام الرياضيات.
- تحليل المشكلات وتفكيكها إلى أجزاء أصغر لفهمها وحلها بشكل أكثر فعالية.

الأهداف الخاصة

فهم وتحليل الجبر:

- حل المعادلات والمتباينات الجبرية.
- فهم وتطبيق القوانين الجبرية مثل قوانين توزيع الضرب، وجمع وطرح العبارات الجبرية.

دراسة وتطبيق المفاهيم الهندسية:

- فهم أساسيات الهندسة مثل الأشكال الهندسية، والزوايا، والمثلثات، والمستطيلات.
- تطبيق القوانين الهندسية لحساب المساحات والحجوم.

فهم وتطبيق مفاهيم التحليل:

- تعلم كيفية التعامل مع الدوال والمعادلات الرياضية.
- دراسة مشتقات الدوال وتكاملها وتطبيقها في مسائل حساب التفاضل والتكامل.

تطبيق مبادئ الإحصاء والاحتمالات:

- فهم أساسيات الإحصاء مثل المتوسطات، والانحراف المعياري، والتوزيعات.
- دراسة مبادئ الاحتمالات وكيفية حساب الاحتمالات لمتغيرات معينة.

تحليل ودراسة نظم المعادلات:

- حل نظم المعادلات الخطية وغير الخطية.
- تطبيق أساليب الحل مثل طريقة التعويض وطريقة الحذف.

فهم وتحليل الدوال والمتغيرات:

- دراسة أنواع الدوال المختلفة مثل الدوال الخطية والدوال التربيعية.
- تحليل خصائص الدوال مثل القيم العظمى والصغرى، والتزايد والتناقص.

الأهداف السلوكية او نواتج التعلم

نواتج تعلم مقرر دراسي في الرياضيات تحدد المهارات والمعرفة التي يتوقع من الطلاب اكتسابها بنجاح بعد إتمام الدراسة. تركز هذه النواتج على تطوير مهارات التحليل والتطبيق والاستدلال في الرياضيات. إليك بعض نواتج التعلم الشائعة لمقرر دراسي في الرياضيات:

1. **فهم المفاهيم الرياضية الأساسية:**
   - التعرف على المبادئ الأساسية في الرياضيات مثل الأعداد، والعمليات الحسابية، والجبر، والهندسة، والتفاضل والتكامل، والإحصاء.
   - فهم كيفية تطبيق هذه المفاهيم في سياقات مختلفة.
2. **تطوير مهارات حل المشكلات:**
   - القدرة على تحليل المشكلات الرياضية وتطبيق استراتيجيات حل مناسبة.
   - استخدام الأساليب الرياضية المختلفة لحل مسائل معقدة وتفسير النتائج بوضوح.
3. **إتقان الجبر والمعادلات:**
   - حل المعادلات والمتباينات الجبرية بمستويات مختلفة من التعقيد.
   - فهم وتطبيق قوانين الجبر وتحليل العبارات الجبرية.
4. **فهم وتحليل المفاهيم الهندسية:**
   - دراسة الأشكال الهندسية، والزوايا، والمساحات، والحجوم.
   - تطبيق القوانين الهندسية لحساب المساحات والحجوم وفهم خصائص الأشكال الهندسية.
5. **تطبيق التحليل والتفاضل والتكامل:**
   - استخدام مبادئ التفاضل والتكامل في تحليل الدوال وحساب المشتقات والتكاملات.
   - تطبيق تقنيات التحليل لحل المشكلات العملية وتفسير النتائج.
6. **تطبيق مبادئ الإحصاء والاحتمالات:**
   - تحليل البيانات باستخدام أدوات إحصائية مثل المتوسطات والانحراف المعياري والتوزيعات.
   - حساب احتمالات الأحداث واستخدام المبادئ الإحصائية لتفسير البيانات.
7. **حل نظم المعادلات:**
   - حل نظم المعادلات الخطية وغير الخطية باستخدام تقنيات مختلفة مثل التعويض والحذف.
   - فهم تطبيقات نظم المعادلات في المشكلات الواقعية.

المتطلبات السابقة

- **يجب على الطالب ان يكون على معرفة بالعمليات الحسابية وكيفية التعامل مع الدوال المثلثية**

	الأهداف السلوكية او مخرجات التعليم الأساسية	الية التقييم
ت	**فهم وتطبيق مفاهيم التحليل:**	الامتحانات اليومية والشهرية ونهاية المقرر
1	تعلم كيفية التعامل مع الدوال والمعادلات الرياضية.	الامتحانات اليومية والشهرية ونهاية المقرر
2	دراسة مشتقات الدوال وتكاملها وتطبيقها في مسائل حساب التفاضل والتكامل.	الامتحانات اليومية والشهرية ونهاية المقرر
3	**تطبيق مبادئ الإحصاء والاحتمالات:**	الامتحانات اليومية والشهرية ونهاية المقرر
4	فهم أساسيات الإحصاء مثل المتوسطات، والانحراف المعياري، والتوزيعات.	الامتحانات اليومية والشهرية ونهاية المقرر

أساليب التدريس (حدد مجموعة متنوعة من أساليب التدريس لتناسب احتياجات الطلاب ومحتوى المقرر)

الاسلوب او الطريقة	مبررات الاختيار
1. المحاضرات النظرية	المقرر نظري
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	

المحتوى العلمي

اسم المادة	باللغة العربية	رياضيات (1)	السنة الدراسية الاولى	عدد الساعات الاسبوعية			
	باللغة الانكليزية	**Mathematics(1)**		نظري	عملي	المجموع	عدد الوحدات
لغة التدريس للمادة			المستوى الاول الفصل الاول (الدروس الاجبارية)	2	----	2	2

المفردات النظرية

الأسبوع	تفاصيل المفردات
1	الدالة – تعريف الدالة اللوغارتمية والاسية والمثلثية ورسم الدوال
2	الغايات – غايات الدوال الجبرية اللوغارتمية
4-3	المتجهات – تحليل المتجهات – الكميات العددية والكميات المتجهة
5	مسائل في تحليل القوى والعزوم – وتطبيقات في مجالات الري
6	المشتقات – تطبيقها في مجال الري وتحليل القوى وفي المساحة
7	مشتقات الدوال الاسية و اللوغارتمية والمثلثية
8	تفاضل – قاعدة السلسلة ومسائل في المواقع
9	الدوال الضمنية – المشتقات ذات المراتب العليا
10	معادلة المماس والنهايات العظمى والصغرى للدالة ونقاط الانقلاب
11	تطبيقات التفاضل في مجال الري السرعة والتعجيل
12	التكامل غير المحدود - للدوال الجبرية
13	تكامل الدوال اللوغاريتمية والاسية والمثلثية
14	التكامل المحدود – تطبيقاته على الدوال المختلفة
15	المساحة تحت المنحنى – المساحة بين منحنين مع تطبيقات في مجال الري

محاضرات الرياضيات

- تحويل الوحدات

- الطول (Length) يرمز له L
- $1\ m = 100\ cm$
- $1m = 1000mm$
- $1\ cm = 10\ mm$

التحويل من كبير الى صغير نجري عملية الضرب

$$1\ m = 1000\ mm$$
$$5\ m = 5000\ mm$$

اما عند تحويل الجزء الصغير الى كبير نجري عملية القسمة وهي عدد الاجزاء الكلية على ما يساويه من اجزاء

Example:

Convert *(5000 mm)* to *(m)*

$$\frac{5000}{1000} = 5m$$

- المساحة (Area) يرمز لها A وحدتها m^2
- الحجم (Volume) يرمز له V وحدته m^3

$$m^3 = 1000\,000\ cm^3$$
$$m * m * m = 100cm * 100cm * 100cm$$
$$1\ liter = 1000cm^3$$
$$m^3 = 1000\ \ell$$
$$\ell = 10^{-3}\ m^3$$

الزمن يقاس بالثانية(Sec)

تحويل يوم الى ثانية نضرب (24 ساعة * 60 دقيقة * 60 ثانية)

- التعجيل = $\frac{\text{السرعة}}{\text{الزمن}} = \frac{m}{sec^2}$
- الكتلة (Mass) تقاس ب (كغم، غم، طن)

كغم = 1000 غم

طن =1000 كغم

4200 = الفدانm^2

2500 =الدونمm^2

10000 = الهكتارm^2 = 4 دونم

Example-1-

Convert (8.64 m/day) to (cm/sec)

$$8.64\,\frac{m}{day} = \frac{8.64*100}{60*60*24} = \frac{8.64}{864} = 0.01\ cm/sec$$

Example-2-

Convert (3 km and 25 m) to (cm)

$$km = 1000m$$
$$3\ km = 3*1000 = 3000\ m$$
$$3000 + 25 = 3025\ m$$
$$3025*100 = 302500\ cm$$

Example-3-

Convert (9.2 km) to (mm)

$$9.2*1000*100*10 = 9\,200\,000$$

Example-4-

Convert (3.2 m^3) to (liter)

$$m^3 = 1000\ liter$$
$$3.2*1000 = 3200\ell$$

Example-5-

Convert (432ℓ/day) to (m^3/sec)

$$432\,\frac{\ell}{day} = 432*\frac{1}{1000*24*60*60} = 5*10^{-6}\ m^3/sec$$

H.W. (1)

If you know the discharge for pipe is $8000\ell/\min$, find the discharge in m^3/sec.

H.W. (2)

Convert (20 km and 40 mm) to (cm)

قوانين المساحات

- مساحة المستطيل= الطول * العرض
- محيط المستطيل= (الطول +العرض) * 2

- مساحة المربع = طول الضلع * نفسه
- محيط المربع = 4 * طول الضلع

- مساحة الدائرة = $r^2\pi$, $\pi = 3.14$
- محيط الدائرة = $2r\pi$

- مساحة المثلث = نصف القاعدة * الارتفاع
- محيط المثلث= 3* طول الضلع
- مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{القاعدة الاولى+القاعدة الثانية}}{2}$ * الارتفاع

محيط شبه المنحرف = القاعدة الأولى + القاعدة الثانية + الضلعين المائلين

أمثلة حساب المساحات للأشكال الهندسية:

Example-1-

Find the area of rectangular in(m^2), length=5cm, width = 5cm.

Solution

Area= length* width

= 5*5 = 25 cm^2

=25/10 000=0.0025 m^2

Example-2-

Find the area of rectangular, width=4cm, and its length is triple the width.

Solution

w=4 cm, L=3W =3*4=12 cm

A=L*W

Example-3-

Find the area of rectangular, if its perimeter is 12 cm, its width 2cm.

Solution

Perimeter= (L+W)*2

12= (L+2)*2

12=2L+4 → 8=2L → L=4

A=4*2 → A=8 cm^2

Example-4-

Agricultural land square shape, its perimeter (400m), what its area in donum?

المحيط = 400 م

محيط المربع = طول الضلع * 4

طول الضلع = $\frac{400}{4} = 100$م

مساحة المربع = (طول الضلع)^2

= $(100)^2$ = 10000 م^2

= المساحة دونم $4 = \frac{10000}{2500}$

H.W -1-

Find the length of rectangular in (m), its perimeter 30 cm, and its width 5cm.

H.W.-2-

Find the area of rectangular in (m), if its length 6m and its width is triple its length.

H.W.-3-

Find the area of rectangular, if you know its perimeter 25 cm, and width 3cm.

Example-5-

A square shape its perimeter is 400 cm, what its length of the side.

Solution

P= length of the side *4

400= length of the side *4

Length of the side=100 cm

Example-6-

Drawing board square shape, the length of its side is 60 cm, what is its perimeter in m.

Solution

P=4*L

P=4*60

P=240 cm

$$P = \frac{240}{100} = 2.4\,m$$

Example-7-

If you know the diameter of circle is 16 cm, what its area?

Solution

$$A = \pi r^2$$

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 \quad \to\to A = \frac{\pi}{4}\,16^2 \quad \to\to A = 200.96\,cm^2$$

Example-8-

Find the diameter of circle in (m), if you know its area is 2826 cm^2.

Solution

$$A = \pi r^2$$

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 \quad \to\to 2826 = \frac{\pi}{4}\,D^2$$

$$D^2 = 2826 * \frac{4}{\pi} = 3600 \quad \to\to \quad D = 60\,cm = \frac{60}{100} = 0.6\,m$$

H.W-1-

Find the perimeter (cm), if you know the radius is 25 m.

H.W-2-

Find the diameter of circle in (m), its perimeter 650 cm.

H.W-3-

If you know the diameter of circle is 55 cm, find the area in m.

قوانين السرعة:

المسافة = السرعة * الزمن

Distance= velocity * time

وحدة قياس السرعة m/sec

وحدة قياس المسافة m، km

وحدة قياس الزمن sec، min، hr

Example-1-

A car is moving 120 km/hr, find the distance in (m), at 30 min.

Solution

Distance= velocity * time

$$\frac{120 * 1000}{60} = 2000\ m/min$$

D=V*t

D= 2000*30 $\longrightarrow$ D=60 000 m

Example-2-

A car is moving by velocity 60 km/hr, find the distance in (m) at 2hr and 17 min.

Solution

V= 60*1000= 60 000 m/hr

$$t = \frac{17}{60} = 0.283\ hr$$

t=2+0.283

t= 2.283 hr

D=V*t

D= 60 000 *2.283 $\longrightarrow$ D=136 980 m

Example-3-

A car is moving distance 100 km, by velocity 50 km/hr, find the time at sec.

Solution

$$v = \frac{D}{t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{D}{v}$$

$$t = \frac{100}{50} \quad \rightarrow \quad t = 2hr \quad \rightarrow t = 2 * 60 * 60 \quad \rightarrow \quad t = 7200\ sec$$

H.W-1-

If you know the distance 150 km at 4hr, find the velocity at m/s.

H.W-2-

A car moving at velocity 66 km/hr, find the distance (m), at 120 min.

H.W-3-

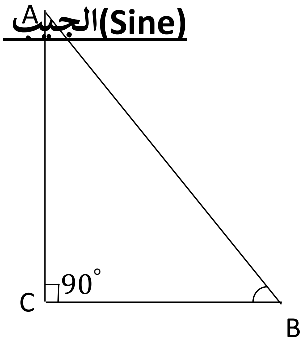
If you know the velocity is 10 km/hr at 100 min, find the distance (m).

النسب والعلاقات المثلثية

Trigonometric function

المثلث هو مضلع له ثلاثة اضلاع ومجموع زواياه 180° ، وهو بأشكال عدة، وما يهمنا هنا في هذا الموضوع المثلث قائم الزاوية.

الجيب(Sine)



$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{AB}$$

الجيب تمام(Cosine)

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{CB}{AB}$$

الظل(Tangent)

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AC}{CB} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

الظل تمام(Cotangent)

$$cot\,\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{CB}{AC} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

القاطع(Secant)

$$sec\,\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\cos\theta}$$

القاطع تمام(cosecant)

$$csc\,\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin\theta}$$

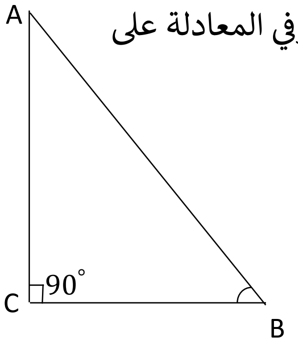
1- Prove that $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

نطبق نظرية فيثاغورس والتي تنص على ان مربع الوتر في المثلث قائم الزاوية = مجموع مربعي الضلعين الاخرين.

$$\sin\theta = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{CB}{AB}$$

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$$



بقسمة طرفي المعادلة على AB^2

$$\frac{(AB)^2}{(AB)^2} = \frac{(AC)^2}{(AB)^2} + \frac{(CB)^2}{(AB)^2}$$

$$1 = (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$$

<u>2- Prove that</u> $$(\sec\theta)^2 - (\tan\theta)^2 = 1$$

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} - \frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}$$

$$\frac{1-(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}$$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

$$1-(\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^2$$

$$\frac{(cos\,\theta)^2}{(cos\,\theta)^2} = 1 = \text{الطرف الايمن}$$

<u>3- Prove that</u> $$(\csc\theta)^2 - (\cot\theta)^2 = 1$$

$$\frac{1}{(\sin\theta)^2} - \frac{(\cos\theta)^2}{(\sin\theta)^2}$$

$$\frac{1-(\cos\theta)^2}{(\sin\theta)^2}$$

$$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$$

$$1-(\cos\theta)^2=(\sin\theta)^2$$

$$\frac{(sin\,\theta)^2}{(sin\,\theta)^2}=1=$$ الطرف الايمن

4- Prove that $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta*\csc\theta$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\overbrace{(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}^{=1}}{\sin\theta*\cos\theta}$$

بما أنه:

$$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$$

إذا

$$=\frac{1}{\sin\theta*\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}*\frac{1}{\cos\theta}$$

$=\sec\theta*\csc\theta=$ الطرف الايمن

5- Prove that

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=2\csc\theta$$

نوحد المقامات

$$\frac{(1+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}{\sin\theta*(1+\cos\theta)}$$

$$\frac{1+2\cos\theta+(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}{\sin\theta*(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta*(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{2*\cancel{(1+\cos\theta)}}{\sin\theta*\cancel{(1+\cos\theta)}}$$

$= 2\csc\theta =$ الطرف الايمن

6- Prove that

$$\sqrt{\frac{1+(\tan\theta)^2}{1+(\cot\theta)^2}}=\tan\theta$$

$$= \sqrt{\frac{1 + (\frac{\sin\theta}{\cos\theta})^2}{1 + (\frac{\cos\theta}{\sin\theta})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}}{\frac{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}{(\sin\theta)^2}}}$$

$$\cos\theta^2 + \sin\theta^2 = 1$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{(\cos\theta^2)}}{\frac{1}{(\sin\theta)^2}}} = \sqrt{\frac{1}{(\cos\theta)^2} * \frac{(\sin\theta)^2}{1}} = \sqrt{\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}}$$

$= \sqrt{(\tan\theta)^2} = \tan\theta =$ الطرف الايمن

7- Prove that

$$\frac{(1 + \cos\theta) * \tan\theta}{\sqrt{1 - (\cos\theta)^2}} - 1 = \sec\theta$$

$$\cos\theta^2 + \sin\theta^2 = 1$$

$$1 - \cos\theta^2 = \sin\theta^2$$

$$= \frac{(1 + \cos\theta) * \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sqrt{(\sin\theta)^2}} - 1$$

$$= \frac{(1 + \cos\theta) * \frac{\cancel{\sin\theta}}{\cos\theta}}{\cancel{\sin\theta}} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} + 1 - 1$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = \text{الطرف الايمن}$$

8- Prove that

$$(\cot\theta)^2 - (\cos\theta)^2 = (\cot\theta)^2 * (\cos\theta)^2$$

$$= \frac{(\cos\theta)^2}{(\sin\theta)^2} - (\cos\theta)^2$$

$$= \frac{(\cos\theta)^2 - (\cos\theta)^2 * (\sin\theta)^2}{(\sin\theta)^2}$$

$$= \frac{(\cos\theta)^2\,(1 - (\sin\theta)^2)}{(\sin\theta)^2}$$

$$\cos\theta^2 + \sin\theta^2 = 1$$

$$1 - \sin\theta^2 = \cos\theta^2$$

$$= (\cot\theta)^2 * (\cos\theta)^2$$

9- Prove that

$$\frac{\cos\theta * \csc\theta}{\tan\theta} = (\cot\theta)^2$$

$$= \frac{\cos\theta * \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} * \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{(\cos\theta)^2}{(\sin\theta)^2} = (\cot\theta)^2 = \text{الطرف الايمن}$$

H.W-1-

$$\cos\theta * \cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$$

H.W-2

$$(\csc\theta)^2 - (\cot\theta)^2 = 1$$

H.W-3-

$$1 + \frac{2\tan\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$$

الأسس واللوغاريتمات

الاس: هو العدد الذي يكتب فوق العامل ليدل على تكرار ذلك العامل.

$$x^3 = x * x * x$$

$$2^3 = 2 * 2 * 2$$

قوانين الأسس:

1- عند الضرب تجمع الأسس جمعا جبريا على ان تكون الاساسات متساوية مثل:

$$x^a * x^b = x^{a+b}$$

$$y * x^2 * y^2 = x^2 * y^3$$

2- عند القسمة تطرح الأسس على ان تكون الاساسات متساوية.

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

3- عند إزالة علامة الجذر يقسم اس المقدار (داخل الجذر) على دليل الجذر:

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{a/b}$$

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

4- عند رفع مقدار الى قوة (اس لأس المقدار) يضرب اس المقدار في تلك القوة.

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

5- كل مقدار مرفوع للأس صفر يساوي 1

$$x^0 = 1$$

6- عند نقل مقدار او عامل مرفوع لأس معين من البسط الى المقام أو بالعكس تتغير إشارة ذلك الاس مثل:

$$\frac{x^a}{x^b} = \frac{x^{-b}}{x^{-a}}$$

7- تتساوى الأسس إذا تساوت الاساسات والعكس صحيح.

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = 3^2$$

$$x = 3$$

اللوغاريتم Log

$$y = \log_a u$$

$$u = a^y$$

وهو على نوعين:

الاعتيادي: أساسه العدد 10 ويستخدم في الجبر ويكتب عادة من دون الأساس مثل $\log 5$.

الطبيعي: أساسه المقدار الثابت (e=2.718) ويستخدم في التفاضل والتكامل ويكتب عادة من دون الأساس ويرمز له ln مثل $\ln 5$.

قوانين اللوغاريتمات:

1- لوغاريتم حاصل ضرب مقدارين او أكثر ولنفس الأساس هو مجموع لوغاريتماتها مثل:

$$\log a * b * c = \log a + \log b + \log c$$

2- لوغاريتم حاصل قسمة مقدارين ولنفس الأساس هو لوغاريتم المقسوم مطروح منه لوغاريتم المقسوم عليه مثل:

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

3- لوغاريتم العدد 1 ولأي أساس =صفر

$$\log_x 1 = 0$$

4- لوغاريتم أي مقدار لأساس مساو لذلك المقدار يساوي 1

$$\log_5 5 = 1$$

$$5 = 5^1$$

<u>ملاحظة مهمة</u>

$$\log 3 \ = \text{معلوم}$$

$$\log 4 \ = \text{معلوم}$$

$$\log 12 \ = \text{مجهول}$$

$$\log 3 * 4 = \log 3 + \log 4$$

Find the value of ***X*** in following equation:

1) $8^{(\frac{x^2}{3}-2)} = 2^x$

$$2^{3(\frac{x^2}{3}-2)} = 2^x$$

$$3\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) = x$$

$$x^2 - 6 = x$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x + 2) * (x - 3) = 0$$

$x = -2, x = 3$

2) $\log_2(x+1) * (x-1) = 3$

$$y = \log_a u$$

$$u = a^y$$

$(x+1)(x-1) = 2^3$

$x^2 - 1 = 8$

$x^2 = 9$

$x \quad = \mp 3$

3) $\log_5 125 = (x+1)(x-1)$

$\log_5 5^3 = 3\log_5 5 = 3$

$3 = (x+1)(x-1)$

$3 = x^2 - 1$

$x^2 = 4 \qquad \rightarrow \quad x = \mp 2$

4) $5^{(x+1)(x-1)} = 125$

$5^{(x+1)(x-1)} = 5^3$

$(x+1)(x-1) = 3$

$x = \mp 2$

5) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

$x = 9^{3/2}$

$x = 3^{2*3/2}$

$x = 27$

6) $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

$x = 16^{5/2}$

$x = 4^{2*5/2}$

$x = 1024$

7) Find the value of x and y from instaintainus function:

$\log_{10}(x-y)=1$

$\log_{10}(3x+4y)=2$

$10^1=x-y \quad *4$

$10^2=3x+4y$

$40=4x-\cancel{4y}$

$100=3x+\cancel{4y}$

$140=7x$

$x=20$

$10=x-y$

$10=20-y$

$y=10$

8) Find the value of x and y from المعادلات الانية instaintainus function:

$3^x+2^y=7$

$3^{x+2}-2^{y+1}=19$

$3^{x+2}=3^x * 3^2$

$3^{x+2}=9*3^x$

$2^{y+1}=2^y*2$

$2^{y+1}=2*2^y$

$3^x+2^y=7$

$9*3^x-2*2^y=19$

$3^x=A$ نفرض ان

$2^y=B$ نفرض ان

$A+B=7 \quad *2$

$9A-2B=19$

$2A+\cancel{2B}=14$

$9A-\cancel{2B}=19$

$11A=33$

$A=3$

$3^x=3^1$

$x=1$

$A+B=7$

$3+B=7$

$$B = 4$$
$$B = 2^y$$
$$4 = 2^y$$
$$2^2 = 2^y$$
$$y = 2$$

Prove that:

$$\frac{x}{1 - y^{-x}} - \frac{x}{y^x - 1} = x$$

$$1 - y^{-x} = 1 - \frac{1}{y^x} = \frac{y^x - 1}{y^x}$$

$$\frac{x}{\frac{y^x - 1}{y^x}} - \frac{x}{y^x - 1} = x$$

$$\frac{x * y^x}{y^x - 1} - \frac{x}{y^x - 1} = x$$

$$\frac{x * y^x - x}{y^x - 1} = \frac{x\cancel{(y^x - 1)}}{\cancel{y^x - 1}} = x = \text{الطرف الأيمن}$$

9) Find the value of x:

$$4^{4x} - 17(2^{4x}) + 16 = 0$$
$$2^{2*(4x)} - 17 * (2^{4x}) + 16 = 0$$
$$2^{4x} * 2^{4x} = 2^{2(4x)}$$
$$put \quad 2^{4x} = A$$
$$A^2 - 17A + 16 = 0$$
$$(A - 1)(A - 16) = 0$$
$$A = 1, A = 16$$
$$2^{4x} = 1 = 2^0$$
$$x = 0$$
$$OR:$$
$$2^{4x} = 2^4 \quad \rightarrow \quad 4x = 4 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

10) Find the value of x:

$$\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 2$$
$$put \quad \sqrt{2^x} = A$$
$$A + \frac{1}{A} = 2 \qquad * A$$

$A^2 + 1 = 2A$
$A^2 - 2A + 1 = 0$
$(A - 1)(A - 1) = 0$
$A = 1$
$\sqrt{2^x} = 1 \quad \rightarrow \quad 2^x = 1 \quad \rightarrow \quad 2^x = 2^0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

11) Find the value of x:

$\log_5(3x + 7) - \log_5(x - 5) = 2$

$\log_5 \dfrac{3x + 7}{x - 5} = 2$
$\dfrac{3x + 7}{x - 5} = 5^2$
$3x + 7 = 25x - 125$
$25x - 3x = 7 + 125 \quad \rightarrow \quad 22x = 132 \quad \rightarrow\rightarrow \quad x = 6$

12) Find the value of x:

$4^x = 5$
$\ln 4^x = \ln 5$
$x * \ln 4 = \ln 5$
$x = \dfrac{\ln 5}{\ln 4}$

H.W. Find the value of x and y from instaintainus function:

$\log_{10} x + \log_{10} y = 1 \quad \ldots..(1)$

$\log_{\sqrt{7}}(x + y) = 2 \quad \ldots\ldots(2)$

Simplify the following بسط ما يلي

1) $\ln \sin\theta - \ln \frac{\sin\theta}{5}$

$= \ln \dfrac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{5}}$

$= \ln 5$

2) $\ln(3x^2 - 9x) + \ln \frac{1}{3x}$

$$= \ln\left(\frac{3x^2 - 9x}{3x}\right)$$

$$= \ln(\frac{3x^2}{3x} - \frac{9x}{3x})$$

$$= \ln(x-3)$$

H.W-1-

$\ln \csc\theta + \ln \sin\theta$

H.W-2-

$\ln(8x+4) - \ln 2^2$

H.W-3-

$3\ \ln \sqrt[3]{t^2-1} - \ln(t+1)$

<u>If you know, $\ln 2 = 0.693 , \ln 3 = 1.098$</u>

Find:

$\ln 16 ,\ \ln \sqrt[3]{27} ,\ \ln 1.5 ,\ \ln 2\sqrt{2} ,\ \ln\frac{4}{9} ,\ \ln\frac{9}{8} ,\ \ln 36$

<u>1) $\ln 16$</u>

$= \ln 2^4 \quad \rightarrow \quad = 4\ln 2 \quad \rightarrow = 4 * 0.693 = 2.772$

<u>2) $\ln \sqrt[3]{27}$</u>

$= \ln(3^3)^{1/3} \quad \rightarrow \quad = \ln 3 \quad \rightarrow = 1.098$

<u>3) $\ln 1.5$</u>

$= \ln\frac{3}{2} \quad \rightarrow = \ \ln 3 - \ln 2 \quad = 1.098 - 0.693$

<u>4) $\ln 2 * \sqrt{2}$</u>

$= \ln 2 + \ln\sqrt{2} \quad \rightarrow = \ln 2 + \ln 2^{1/2} \quad \rightarrow = \ \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2$

$= 0.693 + \frac{1}{2} * 0.693$

<u>5) $\ln\frac{4}{9}$</u>

$= \ln 4 - \ln 9 \quad \rightarrow \quad = \ln 2^2 - \ln 3^2$

$= 2\ln 2 - 2\ln 3 \quad \rightarrow \quad = 2 * 0.693 - 2 * 1.098 \quad \rightarrow = 1.386 - 2.196 = -0.81$

H.W.-1-

$\mathbf{\ln \frac{4}{8}}$

H.W.-2-

$\ln 36$

General exponential function

$a^x = e^{x \ln a} = \cancel{e}^{\ln a^x} = a^x$

1) $\ln e^2 = 2 \quad , \ \ln e = 1$
2) $\ln e^{-1} = -1$
3) $\ln \sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$
4) $\ln e^{\sin x} = \sin x$
5) $e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$
6) $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = 2^3 = 8$

Simplify the following:

1) $e^{2x} = 10$ نأخذ ln الطرفين

$\ln e^{2x} = \ln 10$

$2x = \ln 10 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \ln 10$

2) $e^{\ln(x^2+y^2)} = (x^2 + y^2)$

3) $2 * \ln \sqrt{e} = 2 * \ln e^{1/2} = 2 * \frac{1}{2} * \ln e = 1$

4) $\ln e^{2\ln x} = \ln e^{\ln x^2} = \ln x^2 = 2\ln x$

5) $e^{\ln x - \ln y} = e^{\ln \frac{x}{y}} = \frac{x}{y}$

6) $\ln y = 2t + 4 \quad ,$ نأخذ e للطرفين

$e^{\ln y} = e^{2t+4} \quad \rightarrow \quad y = e^{2t+4}$

7) $\ln(y-40)=5t$,   نأخذ e للطرفين

$e^{\ln(y-40)}=e^{5t} \quad \rightarrow \quad y-40=e^{5t} \quad \rightarrow y=e^{5t}+40$

المتجهات Vectors

تسمى الكميات ذات القيمة والاتجاه بالمتجهات وذلك لتفسير كثير من المفاهيم الفيزيائية مثل القوة والحركة والسرعة.

تمثيل المتجهات:

تمثل المتجهات بالرسم البياني وذلك من نقطة بداية معينة ثم بالاتجاه المعين وذلك بمقياس رسم مناسب.

k يمثل الاتجاه بالمحور الصادي، و j يمثل الاتجاه بالمحور السيني، و وكذلك تمثل بالرموز حيث أن i يمثل الاتجاه بالمحور العمودي.

$A=ai+bj+ck$ الصيغة العامة لاي متجه

جمع المتجهات:

$v=(v_1,v_2)\ ,w=(w_1,w_2)$, $p=$ عدد ثابت

$v+w=[(v_1+w_1),(v_2+w_2)]$

$v-w=[(v_1-w_1),(v_2-w_2)]$

$pv=(pv_1,pv_2)$

Example:

If you know $v=(-2,0,1)$, $w=(3,5,-4), p=3$

Find: $v+w, 3v, -w, w-2v$

$v+w=(-2,0,1)+(3,5,-4)$

$v+w=(1,5,-3)$

$3v=(-6,0,3)$

$-w=(-3,-5,4)$

$w - 2v = (7,5,-6)$

إيجاد طول أو قيمة المتجه:

$v = (v_1, v_2)$

$\|v\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$

$if\ v = (v_1, v_{2,} v_3)$

$\|v\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$

Examples (1):

Find the length of $v = (-2,3)$, $w = (2,3,6)$

$\|v\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$

$\|v\| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{13}$

$\|w\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{49} = 7$

Examples (2):

If you know $u = (1,5,4)$, $v = (3,-2,0)$

Find $\|u + v\|$, $\|2u - 3v\|$

$u + v = (4,3,4)$

$\|u + v\| = \sqrt{16 + 9 + 16} = \sqrt{41}$

$\underline{2u - 3v}$

$2u = (2,10,8)$

$3v = (9,-6,0)$

$2u - 3v = (2,10,8) - (9,-6,0)$

$2u - 3v = (-7,16,8)$

$\|2u - 3v\| = \sqrt{49 + 256 + 64} = \sqrt{369} = 19.2$

ضرب المتجهات

The dot product الضرب النقطي

$If\ u = (u_1, u_2)\ ,\qquad v = (v_1, v_2)$

$u.v = u_1.v_1 + u_2v_2$

$u(v+w) = uv + uw$

$p(u.v) = (pu).v = u(pv)$

Examples

$(3,5).(-1,2)\qquad ,\ \rightarrow\ 3(-1) + 5(2) = 7$

$(2,3).(-3,2)\qquad ,\ \rightarrow\ 2(-3) + 3(2) = 0$

حساب الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$$

$If\ u.v > 0$ حادة θ

$If\ u.v < 0$ منفرجة θ

$If\ u.v = 0$ قائمة $\theta,\ u \perp v$

Find the angle between the vectors: $u(1,-2,2)\ ,\ v(-3,6,2)$

$u.v = (1*-3) + (-2*6) + (2*2) = -11$

$\|u\| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$\|v\| = \sqrt{9+36+4} = 7$

$$\cos\theta = \frac{-11}{3*7} = \frac{-4}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{21}\quad ,\quad \rightarrow\ \theta = 121.6^{\circ}$$

Find the vector, its length $\|v\|$=4, $\theta = 120^{\circ}$

$$\cos\theta = \frac{v_1}{\|v\|}$$

$$cos\ 120 = \frac{v_1}{4}$$

$$v_1 = -2$$

$$sin\ 120 = \frac{v_2}{4}$$

$$v_2 = 3.4$$

$$v = (-2,3.4)$$

Find the following:

❖ $(3,-4,5) + (1,1,-2)$

$= (3 + 1, -4 + 1,5 + (-2))$

$= (4,-3,3)$

❖ $(1,2,-3) + (4,-5,0)$

$= (1 + 4, 2 + (-5), -3 + 0)$

$= (5,-3,-3)$

❖ $3(4,-5,-6)$
$= (-12,15,18)$

If $u = (2,-7,1), v = (-3,0,4), w = (0,5,-8)$
Find $3u - 4v,\quad 2u + 3v - 5w$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{3u - 4v} &= 3(2,-7,1) - 4(-3,0,4)\\ &= (6,-21,3) + (12,0,-16)\\ &= \big(6 + 12, -21 + 0, 3 + (-16)\big)\\ &= (18,-21,-13)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{2u + 3v - 5w} = 2(2,-7,1) + 3(-3,0,4) - 5(0,5,-8)$$

$$= (4, -14, 2) + (-9, 0, 12) + (0, -25, 40)$$
$$= (4 + (-9) + 0), (-14 + 0 - 25), (2 + 12 + 40)$$
$$= (-5, -39, 54)$$

H.W.

a) *If* $u = (3, -2), v = (-2, 5)$

$$Find\ 3u, -2v, u + v, 2u - 3v, -2u5v$$

b) *If* $u = (1,2), v = (4, -2), w = (6,0),$

$$Find\ (7v + w), u.(7v + w) + \|u\|(v.w)$$

Find the dot product, $v = \left(2, -4, \sqrt{5}\right), u = \left(-2, 4, -\sqrt{5}\right)$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$$

$$\|u\| = \sqrt{4 + 16 + 5} = 5$$
$$\|v\| = \sqrt{2 + 16 + 5} = 5$$

$$-1 = \frac{u.v}{5.5}$$

$$u.v = -25$$

H.W.

Find the dot product, $v = (0, 2, 2), u = (0, 0, 1)$

Find the constant b in vector equation $A = 2i + bj + k$, orthogonal with vector $B = 4i - 2j - 2k$

بما انه المتجهين متعامدين أي ان الزاوية بينهما 90°

$A.B = \|A\|.\|B\|.\cos\theta$

$\cos 90 = 0$

$A.B = 0$
$A.B = 2 * 4 + b * (-2) + 1 * (-2) = 0$
$8 - 2b - 2 = 0$
$2b = 6$, $\rightarrow b = 3$

Prove that the two vector is orthogonal, $A = 2k + 2i - j$, $B = 3i - 5k - 4j$
نرتب المتجهات

$$A = 2i - j + 2k$$
$$B = 3i - 4j - 5k$$
$$A.B = 2 * 3 + ((-1) * (-4)) + (2 * (-5))$$

$A.B = 6 + 4 - 10$, $\rightarrow A.B = 0$
المتجهان متعامدان∴

Find the angle between the vectors

$$A = 2j - k + i$$
$$B = 2k - j + 3i$$

نرتب المتجهات

$$A = i + 2j - k$$
$$B = 3i - j + 2k$$
$$A.B = \|A\|.\|B\|.\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{A.B}{\|A\|.\|B\|}$$
$$\|A\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$
$$\|B\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$
$$A.B = (1,2,-1).(3,-1,2), \rightarrow A.B = -1$$
$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{6} * \sqrt{14}}, \rightarrow \cos\theta = -0.1 \rightarrow \theta = 95.73$$

Find the constant b in vector equation $A = 2i + bj + k$, orthogonal with vector $B = 4i - 2j - 2k$
بما انه المتجهين متعامدين أي ان الزاوية بينهما 90°
$A.B = \|A\|.\|B\|.\cos\theta$
$\cos 90 = 0$

$A.B = 0$
$A.B = 2 * 4 + b * (-2) + 1 * (-2) = 0$
$8 - 2b - 2 = 0$
$2b = 6 \;, \qquad \rightarrow b = 3$

Prove that the two vector is orthogonal, $A = 2k + 2i - j \;,\qquad B = 3i - 5k - 4j$

نرتب المتجهات

$$A = 2i - j + 2k$$
$$B = 3i - 4j - 5k$$
$$A.B = 2 * 3 + ((-1) * (-4)) + (2 * (-5))$$

$A.B = 6 + 4 - 10 \;, \qquad \rightarrow A.B = 0$

المتجهان متعامدان.$\therefore$

Find the angle between the vectors

$$A = 2j - k + i$$
$$B = 2k - j + 3i$$

نرتب المتجهات

$$A = i + 2j - k$$
$$B = 3i - j + 2k$$
$$A.B = \|A\|.\|B\|.\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{A.B}{\|A\|.\|B\|}$$
$$\|A\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$
$$\|B\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$
$$A.B = (1,2,-1).(3,-1,2)\,, \quad \rightarrow \quad A.B = -1$$
$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{6} * \sqrt{14}}, \rightarrow \cos\theta = -0.1 \rightarrow \theta = 95.73$$

المحددات او المصفوفات

The Matrix

محصورة بين Column او أعمدة Rawهو مجموعة اعداد حقيقية تكتب على شكل صفوف قوسين كبيرين.

Determineإيجاد مفكوك او قيمة المحدد

$$|A| = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$|A| = a_1.b_2 - b_1.a_2$

اما إذا كانت المصفوفة من الدرجة الثالثة فيتم إضافة العمودين الأول والثاني:

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

Example:

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 2 * 0 - (-1 * 3) = 3$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 6 & -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 6 & -7 \end{matrix}$$

$$|A| = \left[(1 * 4 * 5) + \left((-2) * (-1) * 6\right) + (0 * 3 * 7) - \left((-2) * 3 * 5\right) - (1 * (-1) * (-7) - (0 * 4 * 6))\right]$$

$$|A| = 20 + 12 - 7 + 30$$

$$|A| = 55$$

Example: find $|A|$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 * 4 - 6 = -2$$

Gramar's Rule

قاعدة كرامر

لحل المعادلات الخطية باستخدام المحددات نتبع الخطوات التالية:

1- يجب ان يكون عدد المعادلات مساويا او بعدد العناصر المجهولة.

2- نرتب كل معادلة بحيث تكون عدد عناصرها المجهولة متسلسلة x, y, z والحد المطلق بعد إشارة المساواة.

Find x and y, by Gramar's Rule:

$$3x - y = 9$$
$$x + 2y = -4$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 * 2 - (-1) = 7$$

ونضع قيم y نضع الثوابت بدلا من قيم x لإيجاد $\|Ax\|$:

$$|Ax| = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = 18 - 4 = 14$$

$$x = \frac{|Ax|}{|A|} = \frac{14}{7} = 2$$

ونضع قيم x: نضع الثوابت بدلا من قيم y لإيجاد$|Ay|$

$$|Ay| = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = -12 - 9 = -21$$

$$y = \frac{|Ay|}{|A|} = \frac{-21}{7} = -3$$

<u>Find *x and y and z*, by *Gramar's Rule*:</u>

$$2x + z = -11 - 4y$$
$$3y - x = 2z - 16$$
$$5z = 21 + 3y - 2x$$

أولا: نرتب المعادلات

$$2x + 4y + z = -11$$
$$-x + 3y - 2z = -16$$
$$2x - 3y + 5z = 21$$

$$|A| = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$|A| = (2 * 3 * 5) + (4 * (-2) * 2) + \big(1 * (-1) * (-3)\big) - (4 * (-1) * 5) - (2 * (-2) * (-3) - (1 * 3 * 2)$$

$$|A| = 30 - 16 + 3 + 20 - 12 - 6 = 19$$

$$|Ax| = \left[\begin{array}{ccc|cc} -11 & 4 & 1 & -11 & 4 \\ -16 & 3 & -2 & -16 & 3 \\ 21 & -3 & 5 & 21 & -3 \end{array}\right]$$

$$|Ax| = (11 * 3 * 5) + (4 * (-2) * 21) + \big(1 * (-16) * (-3)\big) - (4 * (-16) * 5) - (-11 * (-2) * (-3) - (1 * 3 * 21)$$

$$|Ax| = -165 - 168 + 48 + 320 + 66 - 63$$

$$|Ax| = 38$$

$$\text{x} = \frac{|Ax|}{|A|} = \frac{38}{19} = 2$$

$$|Ay| = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 1 \\ -1 & -16 & -2 \\ 2 & 21 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & -11 \\ -1 & -16 \\ 2 & 21 \end{matrix}$$

$$|Ay| = (2 * -16) * 5) + ((-11) * (-2) * 2) + \big(1 * (-1) * (21)\big) \\ - \big((-11) * (-1) * 5\big) - (2 * (-2) * 21 - (1 * (-16) * 2)$$

$$|Ay| = -160 + 44 - 21 - 55 + 84 + 32$$

$$|Ay| = -76$$

$$\text{y} = \frac{|Ay|}{|A|} = \frac{-76}{19} = -4$$

$$|Az| = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -11 \\ -1 & 3 & -16 \\ 2 & -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{matrix}$$

$$|Az| = (2 * 3 * 21) + (4 * (-16) * 2) + \big(11 * (-1) * (-3)\big) \\ - (4 * (-1) * 21) - (2 * (-16) * (-3) - ((-11) * 3 * 2)$$

$$|Az| = 126 - 128 - 33 + 84 - 96 + 66$$

$$|Az| = 19$$

$$\text{z} = \frac{|Az|}{|A|} = \frac{19}{19} = 1$$

H.W

<u>Find x *and* y , by *Gramar's Rule*:</u>

$$x + 8y = 4$$
$$3x - y = -13$$
$$answer: x = -4, y = 1$$

<u>Find x , y *and* z, by *Gramar's Rule*:</u>

$$2x + y - z = 2$$
$$x - y + z = 7$$
$$2x + 2y + z = 4$$
$$answer: x = 3, y = -2, z = 2$$

Solve the equation by partition method:

$$y - 2 + x + z = 0$$

$$4x - 3z + 5y = -15$$

$$4z - 23 + 5x = 3y$$

نرتب المعادلات

$$x + y + z = 2$$

$$4x + 5y - 3z = -15$$

$$5x - 3y + 4z = 23$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A = -57$$

$$|Ax| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -15 & 5 & -3 \\ 23 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|Ax| = 2 * \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} -15 & -3 \\ 23 & 4 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} -15 & 5 \\ 23 & -3 \end{vmatrix}$$

$$|Ax| = -57$$

$$|Ay| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -15 & -3 \\ 5 & 23 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|Ay| = 1 * \begin{vmatrix} -15 & -3 \\ 23 & 4 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 4 & -15 \\ 5 & 23 \end{vmatrix}$$

+

$$|Ay| = 114$$

$$Az = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -15 \\ 5 & -3 & 23 \end{vmatrix}$$

$$|Az| = 1 * \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ -3 & 23 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} 4 & -15 \\ 5 & -23 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$|Az| = 171$$

$$x = \frac{|Ax|}{|A|} = \frac{-57}{-57} = 1$$

$$y = \frac{|Ay|}{|A|} = \frac{114}{-57} = -2$$

$$z = \frac{|Az|}{|A|} = \frac{-171}{-57} = 3$$

Cross product الضرب الاتجاهي

Example -1- $let\ u = (1,2,-2),\ v = (3,0,1)$

$$Find\ u \times v$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = 2i - 7j - 6k$$

Example -2- $let\ u = (1,2,-3),\ v = (-4,1,2)$

$$Find\ u \times v$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} k$$

$$= \big(4 - (-3)\big)i - (2 - 12)j + 9k$$

$$u \times v = 7i + 10j + 9k$$

Example -3- $let\ u = (0,1,-2),\ \ v = (3,0,-4)$

$$Find\ u \times v$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -4i - 6j + (-3)k$$

$$u \times v = -4i - 6j - 3k$$

<u>لإيجاد الزاوية المحصورة بين المتجهين في حالة الضرب الاتجاهي:</u>

$$\sin\theta = \frac{|A \times B|}{|A|.|B|}$$

Example:

$$A = 2j - k + i$$

$$B = 2k - j + 3i$$

Find the angle between two vectors.

<u>نرتب المعادلات</u>

$$A = i + 2j - k$$

$$B = 3i - j + 2k$$

$$|A| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$|B| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = 3i - 5j - 7k$$

$$|A \times B| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{83}$$

$$\sin\theta = \frac{|A \times B|}{|A|.|B|}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{14}.\sqrt{6}} = 0.99$$

$$\theta = \sin^{-1} 0.99$$

$$\theta = 83.7^{\circ}$$

التفاضلDifferential

أنواع الدوال:

1- الدوال الجبرية $y = f(x)$
2- دوال ليست جبرية (الدوال المتسامية) وتنتمي اليها الدوال المثلثية مثل $y = \sin x$
3- الدوال العكسية $y = \sin^{-1} x$
4- الدوال اللوغاريتمية $y = \ln x$
5- الدوال الاسية $y = e^x$

المشتقةDerivatives

صيغ الاشتقاق:

1) $y = u^n$

$$\frac{dy}{dx} = n.u^{n-1}.\grave{u}$$

2) $y = (u-a)^n$

$$\frac{dy}{dx} = n.(u-a)^{n-1}.\grave{u}$$

3) $y = u.v$

$$\frac{dy}{dx} = u * \grave{v} + v * \grave{u}$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين: تساوي الدالة الأولى * مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية * مشتقة الدالة الأولى.

4) $y = \frac{u}{v}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v.u - u.v}{v^2}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين تساوي: $\frac{\text{المقام}*\text{مشتقة البسط}-\text{البسط}*\text{مشتقة المقام}}{\text{المقام تربيع}}$

5) $y = u_1 + u_2$

$$\frac{dy}{dx} = \acute{u_1} + \acute{u_2}$$

6) $y = c$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Examples

1) $y = 3$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

2) $y = x$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

3) $y = 3x^2 - 5x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 5$$

4) $y = 8x$

$$\frac{dy}{dx} = 8$$

5) $y = \frac{2x+1}{x^3-x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 - x) * 2 - [(2x + 1) * (3x^2 - 1)]}{(x^3 - x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 2x) - (6x^3 - 2x + 3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 - 3x^2 + 1}{(x^3 - x)^2}$$

6) $y = (2x^2 - 5x + 3)^{10}$

$$\frac{dy}{dx} = 10(2x^2 - 5x + 3)^9 * (4x - 5)$$

7) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 1}$

$$y = (x^3 - 3x + 1)^{1/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x^3 - 3x + 1)^{-2/3} * (3x^2 - 3)$$

8) $y = 6\sqrt{3x^2 + 4}$

$$y = 6 * (3x^2 + 4)^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 * \frac{1}{2}(3x^2 + 4)^{-1/2} * (6x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{18x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$$

9) $y = 3x^2 - 5x + 9$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 5$$

10) $y = (x^2 + 1) * (x^3 + 3)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1) * (3x^2) + (x^3 + 3) * (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

Find $\frac{dy}{dx}$

1) $y = \sqrt{x^2 + 1}$
2) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$
3) $y = \frac{2+x}{2x-1}$
4) $y = \sqrt{2x}$
5) $y = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$
6) $y = (\frac{x+1}{x-1})^2$
7) $y = \frac{x^3-2}{\sqrt{x}}$
8) $y = (x^3 + 3x^2 + 5)^2$
9) $y = x^2 * \sqrt{x^3 + 1}$

قاعدة السلسلة (دالة الدالة) (الدالة المركبة) (Chain Rule)

If $y = f(t), t = f(x)$

$$\frac{dy}{dt} = \quad , \quad \frac{dt}{dx} =$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx}$$

Ex (1): find $\frac{dy}{dx}$

$y = 3u^2 + 1$

$u = 2x - 3$

$$\frac{dy}{du} = 6u$$
$$\frac{du}{dx} = 2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$
$$= 6u * 2$$
$$\frac{dy}{dx} = 12u$$
$$\frac{dy}{dx} = 12 * (2x - 3) = 24x - 36$$

<u>Ex (2):</u>

If you know

$u = 8 - 3x^3 + 2$

$y = u^{100}$

Find $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{du} = 100u^{99}$$
$$\frac{du}{dx} = -9x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = 100u^{99} * -9x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = -900x^2 * (8 - 3x^3 + 2)^{99}$$

<u>Ex (3):</u>

If you know

$u = x^2 - x + 4$

$y = u^{23}$

Find $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{du} = 23u^{22}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = 23u^{22} * (2x - 1)$$
$$\frac{dy}{dx} = 23(x^2 - x + 4)^{22} * (2x - 1)$$

H.W.-1-

$z = x^2 + 1$

$y = z^{3/2}$

Find $\frac{dy}{dx}$

H.W.-2-

$w = 3x$

$y = w^2 - w^{-1}$

Find $\frac{dy}{dx}$

تفاضل الدالة الضمنية Impact function:

الدالة الضمنية: هي تلك الدالة التي لا يمكن استخراج أحد المتغيرين من الدالة بدلالة المتغير الاخر، (لا نستطيع فصل المتغيرات عن بعضها البعض).

نضع $\frac{dy}{dx}$ بعد y كل اشتقاق ل

EX:(1)

$$x^4 . y - 2x^2 = 3y^{-3}$$
$$x^4 . \frac{dy}{dx} + y * 4x^3 - 4x = -9y^{-4} . \frac{dy}{dx}$$
$$x^4 . \frac{dy}{dx} + 9y^{-4} . \frac{dy}{dx} = 4x - 4yx^3$$
$$(x^4 + 9y^{-4})\frac{dy}{dx} = 4x - 4yx^3$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 4yx^3}{x^4 + 9y^{-4}}$$

EX:(2)

$$y^4 - xy^2 + x^2 - 2 = 0$$

$$4y^3\frac{dy}{dx}-\left[x.2y.\frac{dy}{dx}+y^2*1\right]+2x=0$$
$$4y^3\frac{dy}{dx}--2xy\frac{dy}{dx}-y^2+2x=0$$
$$4y^3\frac{dy}{dx}--2xy\frac{dy}{dx}=y^2-2x$$
$$(4y^3-2xy)\frac{dy}{dx}=y^2-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2x}{4y^3-2xy}$$

قواعد اشتقاق الدوال المثلثية

$$y=sinx\rightarrow\frac{dy}{dx}=cosx$$

$$y=cosx\rightarrow\frac{dy}{dx}=-sinx$$

$$y=tanx\rightarrow\frac{dy}{dx}=sec^2x$$

$$y=secx\rightarrow\frac{dy}{dx}=secx\ tanx$$

$$y=cscx\rightarrow\frac{dy}{dx}=-cscx\ cotx$$

$$y=cotx\rightarrow\frac{dy}{dx}=-csc^2x$$

Examples:

1) $5y^2+siny=x^2$

$10y.\frac{dy}{dx}+cosy*\frac{dy}{dx}=2x$

$\frac{dy}{dx}(10y+cosy)=2x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{10y+cosy}$

2) If $y = \cos t \quad x = sin\ t$

$find\ \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dt} = -\sin t\ ,\ \frac{dx}{dt} = \cos t \rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx}$

$= -sin\ t\ *\ \frac{1}{\cos t}$

$\frac{dy}{dx} = -tan\ t$

3) $y = sin\ (x+1)$

$\frac{dy}{dx} = cos\ (x+1)$

4) $y = cos\ 5x$

$\frac{dy}{dx} = -sin\ 5x\ *\ 5 = -5\ sin\ 5x$

5) $tan\ (2-x) = y$

$\frac{dy}{dx} = sec^2(2-x)\ *\ -1$

$\frac{dy}{dx} = -\ sec^2(2-x)$

6) $y = sec(2x-1)$

$\frac{dy}{dx} = sec(2x-1)\ tan(2x-1)\ *\ 2$

$\frac{dy}{dx} = 2\ sec(2x-1)\ tan(2x-1)$

7) $y = csc(x^2 + 7x)$

$$\frac{dy}{dx} = -csc(x^2 + 7x) * cot(x^2 + 7x) * (2x + 7)$$

8) $y = sec^2x - tan^2x$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,sec\,x * sec\,x.tan\,x - 2tan\,x.sec^2x$$

$$= 2\,sec^2x\,tanx - 2\,sec^2x\,tanx$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

9) $y = sin^3x$

$$\frac{dy}{dx} = 3sin^2x * cosx$$

10) $y = cos(sin\,x)$

$$\frac{dy}{dx} = -sin(sin\,x) * cos\,x$$

11) $y = (csc\,x + cot\,x)^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = -1\,(csc\,x + cot\,x)^{-2} * (-csc\,x\,cot\,x - csc2\,x)$$

$$= \frac{\csc x\,(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\csc x}{\csc x + \cot x}$$

12) $y = \sin\frac{x-2}{x+3}$

$$\frac{dy}{dx} = cos\frac{x-2}{x+3} * \frac{x+3-(x-2)}{(x+3)^2}$$

$\frac{dy}{dx} = cos\frac{x-2}{x+3} * \frac{5}{(x+3)^2}$

13) $y = sin^2\,(3x - 2)$

$\frac{dy}{dx} = 2\sin(3x - 2) * \cos(3x - 2) * 3$

$\frac{dy}{dx} = 6\sin(3x - 2)\cos\,(3x - 2)$

14) $y = (1 + \cos 2x)^2$

$\frac{dy}{dx} = 2(1 + \cos 2x) * -\sin 2x * 2$

$\frac{dy}{dx} = -4\sin 2x\,(1 + \cos 2x)$

15) $y = sin(cos(2x - 5)\,)$

$\frac{dy}{dx} = cos[\cos(2x - 5)]$ * -sin (2x-5) * 2

$\frac{dy}{dx} = \;-2\sin(2x - 5)\cos\,(\cos x(2x - 5))$

16) Find $y"$

$y = \tan x$

$y^{-} = sec^2x$

$y" = 2\sec x * \sec x\,.\tan x$

$y" = 2\,sec^2x\;\tan\;\; x$

الدالة الاسية

The exponential function

Lne=1 الأساس، lnمشتقة الدالة الاسية =الدالة الاسية نفسها * مشتقة الاس *

Example:

1) $y = e^{3x}$

$\frac{dy}{dx} = e^{3x} * 3 = 3e^{3x}$

2) $y = x\, e^{x}$

$\frac{dy}{dx} = xe^{x} \; + \; e^{x}$

3) $y = e^{x}.x^{3}$

$\frac{dy}{dx} = e^{x}.3x^{2} + x^{3}e^{x}$

4) $y = x^{5}e^{x}$

$\frac{dy}{dx} = x^{5}.e^{x} + e^{x} * 5x^{4}$

5) $y = \frac{x^{4}}{e^{x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x}*4x^{3}-x^{4}*e^{x}}{(ex)^{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^{3}e^{x}-x^{4}e^{x}}{e^{2x}}$

6) $y = \sqrt{xe^{x} + 3x}$

$y = (xe^{x} + 3x)^{1/2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(xe^{x}+3x)^{1/2} * (xe^{x} + e^{x} + 3)$

7) $y = (2x - 1)e^{2x}$

$\frac{dy}{dx} = (2x - 1) * e^{2x}. 2 + e^{2x} * 2$

$\frac{dy}{dx} = (4x - 2)e^{2x} + 2e^{2x}$

دالة اللوغاريتم الطبيعي:

$y =$lnx

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

مشتقة الln مشتقة ما بعد = ln $\frac{1}{\text{مابعد } ln}$ *

Example:

1) $y = \ln(2x + 7)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x+7}$ * 2x

2) $y = \ln(x^2 + 8)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+8}$* 2x

3) $y = \ln(lnx)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{lnx} . \frac{1}{x} = \frac{1}{x.lnx}$

4) y = ln x^x

y = x ln x

dy = x. $\frac{1}{x} + \ln x$

$\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$

5) y = ln 5 x^2

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5*x^2}$. 10 x

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$

6) y = ln 3x

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x} . 3 = \frac{1}{x}$

7) y = ln sin 5 x

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin 5x}$ cos 5x * 5

$\frac{dy}{dx} = \frac{5 \cos 5x}{\sin 5\ x}$ = 5 cot 5x

8) y = ln (sin e ^{x})

$\frac{dy}{dx}$ = $\frac{1}{\sin e^x}$ * cos e ^{x} . e ^{x}

$\frac{dy}{dx}$ = e ^{x} cot e ^{x}

9) y = $\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x}}$

Y = $\frac{e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{e^{-2x}}{e^{2x}}$

Y = 1 + e^{-4x}

$\frac{dy}{dx} = 0 + e^{-4x} * -4$

$\frac{dy}{dx} = -4\ e^{-4x}$

10) y = sec $\sqrt{e^{2x} + 1}$

Put u = e^{2x+1}

Y = sec $\sqrt{u}$

$\frac{dy}{du} = \sec\sqrt{u}\ .\ \tan\sqrt{u}\ *\ \frac{1}{2}\ u^{-1/2}$

$\frac{du}{dx} = e^{2x}\ .\ 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \sec\sqrt{u}\ \ \tan\sqrt{u}\ *\ \frac{1}{2}\ u^{-1/2}\ \ *\ 2\ e^{2x}$

$\frac{dy}{dx} = \sec\sqrt{e^{2x}+1}\ \ \tan\sqrt{e^{2x}+1}\ \ *\ e^{2x}\ *\ (e^{2x+1})^{-1/2}$

11) $y = x^2 * \ln(2x)$

$Y' = x^2 * \frac{1}{2x} * 2 + \ln(2x) * 2x$

$Y' = x + 2x \ln(2x)$

12) $y = \ln(\tan x + \sec x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x + \sec x} * (\sec^2 x + \sec x \tan x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x + \sec x} * \sec x (\sec x + \tan x)$

$\frac{dy}{dx} = \sec x$

اشتقاق الدالة الاسية من نوع a^x

$Y = a^x$

$\frac{dy}{dx} = a^u . \ln a . \frac{du}{dx}$

الاساس * الدالة الاسية نفسها ln مشتقة اي دالة اسية هي مشتقة الاس *

Example:

1. $y = 3^{x^4}$

$$\frac{dy}{dx} = 3^{x^4} * 4x^3 * \ln 3$$

2. $y = 10^{\ln x}$

$\frac{dy}{dx} = 10^{\ln x} * \frac{1}{x} * \ln 10$

3. $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$

$\ln y = \ln (x^2 + 1)^{\sin x}$

$\ln y = \sin x \ \ln (x^2 + 1)$

$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = \sin x * \frac{1}{x^2+1} * 2x + \ln (x^2+1)$

$\frac{dy}{dx} = y * [(\sin x \frac{2x}{x^2+1}) + \cos x \ln (x^2+1)]$

$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)^{\sin x} . [(\sin x \frac{2x}{x^2+1}) + \cos x \ln (x^2+1)]$

ملاحظة:

(ناخذ **x** مرفوع الى اس هو ايضا حالة متغيرة (**x** الايجاد مشتقة أي دالة فيها متغير وليكن الطرفين ثم تطبيق خاصية الرفع. **ln**

4) $\boldsymbol{y = X^{\ln x + x}}$

$\boldsymbol{\ln y = \ln x^{\ln x + x}}$

$\mathbf{\ln y = (\ln x + x) * \ln x}$

$\mathbf{\ln y} \quad \mathbf{= (\ln x)^2 + X \ \ln x}$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2lnx.}{x} + x.\frac{1}{x} \quad +lnx$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2lnx.}{x} + \ln x + 1\right)$$

تطبيقات على المشتقة

ايجاد ميل المماس لمنحني الدالة عند نقطة معينة: -

تمثل ميل المماس عند أي نقطة على المنحني $y = f(x)$ تمثل منحني فان $y = f(x)$ إذا كانت وتسمى ميل المنحني.

اولا نوجد $\frac{dy}{dx}$

Example 1:

$X^2 + y^2 + 3xy = 1$ at (1, 2) find the tangent eq.

اوجد معادلة المماس

$2x + 2y.\frac{dy}{dx} + 3x.\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

$2x + 3y + \frac{dy}{dx}(2y + 3x) = 0$

$2+6+(\frac{dy}{dx} * (4 + 3)) = 0$

$\frac{dy}{dx}(7) = -8$

$$\frac{dy}{dx} = M = \frac{-8}{7}$$

معادلة المماس

$y-y_1=M(x-x_1)$

$y-2=\frac{-8}{7}(x-1)$

معادلة العمود

$y-2=\frac{7}{8}(x-1)$

ميل العمود = -(1 / ميل المماس)

Example 2

$4x^2+5y^2=21$ at (2,1)

$8x+10y.\frac{dy}{dx}=0$

$8*2+10*1*\frac{dy}{dx}=0$

$16=-10*\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=M=\frac{-16}{10}=\frac{-8}{5}$

$Y-1=\frac{-8}{5}.(X-2)$

$Y-1=\frac{5}{8}*(x-2)$ معادلة العمود

Example 3

Find the point included to the curve $y=x^2-3x+5$, when the tangent parallel the line its equation is $x-y=5$

جد نقطة تنتمي الى المنحني $y=x^2-3x+5$ الذي يوازي المستقيم الذي عندما المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $x-y=5$

$\frac{dy}{dx}=M=2x-3$

$M = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-1}{-1} = 1$

ميلهما متساوي∴بما ان المماس يوازي المستقيم،

2x-3=1

2x=4

X=2

Y=4-6+5=3

النقطة هي(2,3)

Example 4

Find the equation of tangent and perpendicular on it for curve

$y = 2x + \frac{3}{x^2+2} \quad at\ x = -1$

جد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للمنحني $y = 2x + \frac{3}{x^2+2} \quad at\ x = -1$

$y = 2 * (-1) + \frac{3}{(-1)^2+2}$ y=-1 النقطة (-1,-1)

$Y' = 2 + \frac{-3*2x}{(x^2+2)^2}$

Y=-1

النقطة (-1,-1)

$Y' = 2 - \frac{6x}{(x^2+2)^2}$ =M

$Y' = 2 - \frac{6*-1}{((-1)^2+2)^2}$

$Y' = 2 + \frac{6}{9} = \frac{8}{3}$

معادلة المماس

$Y + 1 = \frac{8}{3}(x + 1)$

3y+3=8x+8

3y+1=$\frac{-3}{8}$ (x+1)

8y+8 = -3x-3

8y + 3x +11=0

Example 5

جد قيمة الثابت c لمعادلة المنحني كي يمس المستقيم y=x

Find the constant C, at the curve function equation to touch the line y=x

$y = X^2 + C$

y=x

بما ان المنحني يمس المستقيم، اذا ميل المنحني =ميل المستقيم

ميل المنحني $\frac{\text{dy}}{\text{dx}} = 2x$

ميل المستقيم $\frac{\text{dy}}{\text{dx}} = 1 = m$

المنحني m = المستقيم m

M=1=2x

X=$\frac{1}{2}$

Y=x

X=$\frac{1}{2}$

(نقطة التماس هي نقطة مشتركة بين المنحني والمستقيم $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ احداثي نقطة التماس) فيجب ان تحقق معادلة كلا المنحنيين: -

$\boldsymbol{y = X^2 + C}$

$\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^2 + \boldsymbol{C}$

$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$y = X^2 + \frac{1}{4}$$

تطبيقات التفاضل (المشتقة) في السرعة والتعجيل

If you know that the equation $d = t^3 + t + 5$, is the function of distance at meters and it's the time at second, find the velocity and acceleration at the six second.

تمثل **d** تمثل حركة جسم على خط مستقيم حيث $d = t^3 + t + 5$ **اذا كانت العلاقة** الزمن بالثواني، جد السرعة للجسم في أي زمن، ثم جد موضعه وسرعته **t** الازاحة بالامتار و وتعجيله عند الثانية السادسة من بدء الحركة.

$$d = t^3 + t + 5$$
$$v = 3t^2 + 1$$
$$d = 6^3 + 6 + 5 = 227\text{m}$$
$$v = 3 * 6^2 + 1 = 109 \; m/s$$
$$a = 6t = 6 * 6 = 36 \quad m/s^2$$

A body moving in a straight line, find the distance, when the velocity is $\left(1\frac{m}{s}\right)$, $d=\sqrt{2t^2+18}$, where d is the distance.

جسم يتحرك بخط مستقيم احسب بعده عندما تكون السرعة 1متر/ثانية

$$d=\sqrt{2t^2+18}$$

$$\acute{d}(t)=v=\frac{1}{2}*(2t^2+18)^{-½}\quad *4t$$

$$=1V=\frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}}$$

$$2t=\sqrt{2t^2+18}$$

$$4t^2=2t^2+18$$
$$2t^2=18$$

$$t^2=9\rightarrow t=3$$
$$d=\sqrt{2t^2+18}$$

$$d=\sqrt{2*3^2+18}$$

$$d=\sqrt{36}=6$$

التكاملIntegral

هو عملية عكس التفاضل أي هي عملية مراد فيها ايجاد دالة علمت مشتقتها ويرمز العملية التكامل $\int$

$$\bar{f}(x)=g(x)$$

$$\int g(x)=f(x)+c$$

هو ثابت التكاملcحيث ان

قواعد التكامل غير المحدد: Undifined integral

القاعدة الاولى a) $\int dx = x + c$

القاعدة الثانية b) $\int x^2\, d = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

1- $\int x^4 \ \mathrm{dx} = \frac{x^5}{5} + c$

2- $\int \sqrt{n}\, dx = \int n^{1/2}\ dx = \frac{n^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3} * n^{3/2} + \mathrm{c}$

3- $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c$

$= \frac{-1}{2x^2} + c$

4- $\int 6x^2 \mathrm{dx} \ = \frac{6x^3}{3} + c = 2x^3 + c$

القاعدة الثالثة c) $\int [\ f(x) + g(x)]\, dx$

$= \int f(x) dx + \int g(x)\, dx$

5- $\int (6\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 3)\ \mathrm{dx}$

$= \frac{6x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + c$

$= 2x^3 - \frac{5x^2}{2} + 3x + c$

6- $\int \left(t - \frac{2}{t^2} + 3\right) dt$

$= \frac{t^2}{2} - \frac{2t^{-1}}{-1} + 3t + c$

$= \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t} + 3t + c$

القاعدة الرابعة $\overline{f}\ (x\ )$ D) $\int [f(x)]^{\mathrm{n}}$

اذا كانت دالة قابلة الاشتقاق ومرفوعة لاس فيجب توفر مشتقة داخل القوس

7- $\int (x^2+3x-5)^4(2x+3)\,dx$

$=\frac{(x^2+3x-5)^5}{5}+c$

8- $\int \frac{6x}{(3x^2+5)^7}dx$

$$\int (3x^2+5)^{-7}.6x \quad dx$$

$=\frac{(3x^2+5)^{-6}}{-6}+c=\frac{-1}{(3x^2+5)^{-6}}+c$

9- $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt[3]{2x^3+6x+5}}$

$$\int (x^2+1)(2x^3+6x+5)^{-1/3}\,dx$$

$$\int (x^2+1)(2x^3+6x+5)^{-1/3} * \frac{6}{6} \quad dx$$

$$\frac{(2x^3+6x+5)^{2/3}}{2/3} * \frac{1}{6}+c$$

$$=\frac{1}{6}*\frac{3}{2}*(2x^3+6x+5)^{2/3} \ +c$$

10- $\int \frac{5x^4+2x}{x^3}dx$

$$\int (5x^4+2x).x^{-3} \ dx$$

$$=\int 5x+2x^{-2} \ dx$$

$$=\frac{5x^2}{2}+\frac{2x^{-1}}{-1}+c$$

11- $\int (x^2+2)^7.x.\,dx$ $\quad *\frac{2}{2}$

$$=\frac{1}{8*2}(x^2+2)^8+c$$

$$=\frac{1}{16}(x^2+2)^8+c$$

12- $\int \frac{dx}{9x^2+12x+4}$

نلاحظ ان المقام مربع كامل (نحلل بالتجربة)

$$=\int \frac{dx}{(3x+2)^2}=\int (3x+2)^{-2}\,\mathrm{dx}$$

$$=\frac{1}{3}*\frac{(3x+2)^{-1}}{-1}+\mathrm{c}$$

13- $\int (x+3)(x^2+6x+1)^{5/2}$

$$= \int 2*(x+3)*\frac{1}{2}(x^2+6x+1)^{5/2}\,\mathrm{dx}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+6x+1)^{7/2}*\frac{2}{7}+c$$

$$=\frac{(x^2+6x+1)^{7/2}}{7}+\mathrm{c}$$

14- $\int x^2\,(7-2x^3)^4\mathrm{dx}$

$$\int x^2\,(7-2x^3)^4*\frac{-6}{-6}\,dx$$

$$\frac{-1}{6}*\frac{(7-2x^3)^5}{5}+c$$

$$\frac{-1}{30}*(7-2x^3)^5+c$$

15_ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx$

$$=\int (x^2+9)^{-½}*x*\frac{2}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{x}^2+9)^{1/2}*2+\mathrm{c}$$

16- $\int \frac{dx}{x}=\ln x+c$

الدالة الاسية نفسها لكن يجب توفير مشتقة الاس e^x*تكامل*

الاساس ln الدالة الاسية نفسها لكن يجب توفير مشتقة الاس و a^xتكامل

17- $\int e^{2x}\,dx$

$$\frac{1}{2}\int e^{2x}*2\,dx$$

$$\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

18- $\int e^{x^2-2x+1}\quad (2\mathrm{x}-2)\;\mathrm{dx}$

$=e^{x^2-2x+1} \quad +c$

19- $\int \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$

$=\int e^{\sqrt{x-1}} \quad (x-1)^{½} \quad dx$

$= 2e^{\sqrt{x-1}}+c$

20- $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} dx \qquad \frac{d}{dx}\ln x \quad = \frac{1}{x}$

$$\frac{d}{dx} e^x + e^{-x} = e^x - e^{-x}$$

البسط هو مشتقة المقام

$=ln(e^x + e^{-x}) + c$

21- $\int \frac{x}{(x+1)} dx$

$$= \int \frac{x+1-1}{x+1} dx$$

$$= \int \frac{x+1}{x+1} - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$=dx - \frac{1}{x+1} dx$

$=x-\ln(x+1) + c$

22- $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx$

$=\int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})} dx$

$=\int dx - \int \sqrt{x} \quad dx$

$=x-x^{3/2} *\frac{2}{3}+c$

23- $\int \sin 3x \quad dx$

يجب توفير مشتقة الزاوية

$=\frac{-1}{3}\cos 3x + c$

24- $\int (\sin x)^2 \cos x \quad dx$

$$=\frac{(\sin x)^3}{3}+c$$

25- $\int (1-\sin^2(3t)) \cos 3t \quad dx$

$$\int (\cos 3t - \sin^2(3t) \cos 3t)dx$$

$$\frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{3} \quad \frac{\sin^3(3t)}{3}+c$$

26- $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

$= \int \cos x^{½} * x^{-½}$dx

=-2sin $\sqrt{x}$+c

27- $\int \sin x \cos x\,[\sin x + \cos x]\,dx$

=$\sin^2 x \cos x + \cos x^2 \sin x\, dx$

=$\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^3 x}{3} + c$

$\int \frac{t^2-2t^4}{t^4}$dx 28-

=$\frac{t^2}{t^4} - \frac{2t^4}{t^4}dt$

=$t^{-2}dt - 2dt$

$$\frac{t^{-1}}{-1} - 2t + c$$

29-$\int \frac{dy}{cscy} = \int \sin y \quad dy = -\cos y \; + c$

30-$\int \sin(x+9)\, dx \quad = -\cos(x+9) + c$

31-$\int \frac{1}{x^2} + \sec^2 \pi x\, dx$

$$\int \frac{dx}{x^2} + \int \sec^2 \pi\, dx$$

=$\frac{-1}{x}$+ $\frac{1}{\pi}\tan \pi x$+c

32-$\int 2^x\, dx = \frac{2x}{ln2} + c$

33-$\int x^2 e^{x^3}\, dx$

=$\frac{1}{3}e^{x^3} + c$

34-$\int x\sqrt{x^2-2}\, dx$

=$\frac{1}{2}(x^2-2)^{3/2} * \frac{2}{3} + c$

$=\frac{1}{3}(x^2-2)^{3/2}+c$

35- $\int \frac{e^x}{e^x+3}\;dx$

$=\ln(e^x+3)$

$\frac{d}{dx}\;\ln e^x+3$

$=\frac{1}{e^x+3}*e^x$

التكامل المحدد: -

1) $\int_a^b c\,dx$

$=cx\,\Big|_a^b$

$=cb-ca$

2) $\int_2^5 (x+5)\,dx$

$=\frac{x^2}{2}+5x\,\Big|_2^5$

$=\frac{25}{2}+25-\left(\frac{4}{2}-10\right)$

$=25.5$

3) $\int_0^1 (x^2+3x)\,dx$

$=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\,\Big|_0^1$

$=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{2+9}{6}=\frac{11}{6}$

4) $\int_1^3 (2x^2+5x)^3\,(4x+5)\,dx$

$=\frac{(2x^2+5x)^3}{3}\,\Big|_1^3$

$=\frac{(2*3^2+15)^3}{3}-\frac{2+5}{3}$

5) $\int_1^3 (2x^2+6x)^2\,(2x+3)\,dx$

$$\frac{\frac{1}{2}(2x^2+6x)^3}{3}\Big|_1^3$$

6) $\int_0^1 (x^3+1)^2 \Big|_1^3 dx$

$=\int_0^1 x^6+2x^3+1=\frac{x^7}{7}+\frac{2x^4}{4}+x\Big|_0^1$

Example:

Find the curve equation, which that its tangent is $4x^3+18x^2+8x+3$, and pass the point (1, 11)

اوجد معادلة المنحني الذي ميله $4x^3+18x^2+8x+3$) ويمر بالنقطة (1,11)

$\frac{dy}{dx}$= $4x^3+18x^2+8x+3=M$

$dy=(4x^3+18x^2+8x+3)\,dx$

Y=$\int(4x^3+18x^2+8x+3)dx$

Y=4*$\frac{x^4}{4}+\frac{18}{3}x^3+\frac{8x^2}{2}+3x+c$

11=1+6+4+3+c

C=-3

Y=$x^4+6x^3+4x^2+3x-3$

Example:

Find the curve equation, which that its tangent is m= $x * \ (x+5)^2$, and pass the point (2, 1)

اوجد معادلة المنحني الذي ميله m= $x * \ (x+5)^2$) ويمر بالنقطة 2, 1(

$$\frac{dy}{dx} = x * (x^2 + 10\,x + 25) = M$$

$$dy = (x^3 + 10x^2 + 25x)\,dx$$

$$Y = \int (x^3 + 10x^2 + 25x)\,dx$$

$$Y = *\frac{x^4}{4} + \frac{10}{3}x^3 + \frac{25x^2}{2} + c$$

Area under curve

المساحة تحت المنحني

1) Area between $f(x)$ and x-axis

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y \ \ dx$$

المساحة بين المنحني و x-axis

$$A = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b x \ \ dy$$

المساحة بين المنحني و y-axis

2) Area between two curves

$y_1 = f(x_1), \ \ y_2 = f(x_2)$

A = $\int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$ x-axis

$x_1 = g(y_1), \qquad x_2 = g(y_2)$

$A = \int_a^b (x_1 - x_2)\, dy$ y-axis

ملاحظات: -

1) إذا اعطانا دالة وحدود تكامل فالحل يكون مباشر.
2) إذا اعطانا دالتين بدون حدود تكامل نقاطع الدالتين
3) إذا اعطانا دالة فقط بدون حدود، فالحل يكون بالاعتماد على المحور، فاذا اعطى المساحة بالنسبة للمحور x ضيف معادلة y=0، وإذا اعطى المساحة بالنسبة للمحور y، نضيف معادلة x=0 ثم تقاطع الدالتين.

Ex1:

Find the area between the curves Y=2x and x-axis from x=0 to x=2

$A = \int_a^b y\ \ dx\ = \int_0^2 2x$

$A = \frac{2x^2}{2} \Big|_0^2 = 4\ unite^2$

Ex2: Find the area between the curve y=x^2 and line y=3x.

$y = x^2, y = 3x$

$x^2 = 3x \Longrightarrow x^2 = 3x = 0$

$x(x-3) = 0, x = 0, x = 3$

$$A = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$$

$$A = \int_0^3 3X - x^2\ \ dx$$

$$= \frac{3X^2}{2} - \frac{X^3}{3} \Big|_0^3$$

$$=\frac{3*9^2}{2}-\frac{3^3}{3}$$

$$=13.5\text{-}9=4.5\ Unite^2$$

Ex3: Find the area between the curve $\boldsymbol{y=x(x^2-4)}$ ***and x_axis***

$$y=x(x^2-4)$$
$$y=0$$
$$x(x^2-4)=0$$
$$x=0, x=\mp 2$$

$$A=|A_1|+|A_2|$$

$$A=\int_{-2}^{0}X(x^2-4)+\int_{0}^{2}X(x^2-4)$$

$$=\int_{-2}^{0}X^3-4X+\int_{0}^{2}X^3-4X$$

$$=\frac{X^4}{4}-\frac{4x^2}{2}\Big|_{-2}^{\circ}+\frac{X^4}{4}-\frac{4x^2}{2}\Big|_{0}^{2}$$

$$A|4|+|-4|=8\ unite^2$$

طول القوس او طول المنحنيLength of curve

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

1) If y=x Find the length of curve from x=1 to x=3

Y=x

$$\frac{dy}{dx}=1,\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$$

$$L=\int_{1}^{3}\sqrt{2}\ \ dx$$

$$L=\sqrt{2}\,x\,|_{1}^{3}$$

2) Find the length of curve $y=3x^{3/2}-1$for x=0, x=1

$$\frac{dy}{dx}=3*\frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2}x^{½} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{81}{4}x$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{81}{4}x} \quad dx$$

$$L = \frac{4}{81} * \frac{2}{3}\left(1 + \frac{21}{4}x\right)^{3/2} |_0^1$$

$$= \frac{8}{243}\left[\left(1 + \frac{21}{4}x\right)^{3/2} - 1\right]$$

L=3.192 unite

3) Find the length of curve:

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1 \; for \; 0 \le x \le 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} * \sqrt{2} * \frac{3}{2} * x^{½} = 2\sqrt{2}x^{½}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(2\sqrt{2}x^{½}\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + 8x$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + 8x} \; dx$$

$$(1 + 8x)^{3/2} * \frac{2}{3} * \frac{1}{8} |_0^1$$

$$= \frac{1}{12}\left[(1 + 8)^{3/2} - 1\right]$$

$L = 2{,}167 \ unite$

تطبيقات على التكامل: -

1) If 2t+4 is equation of velocity of body, find the distance at any time, if you know the distance is 32m at 4 second, find the distance after ten second

$\mathrm{v} = 2\mathrm{t} + 4$

$$d = \int 2t + 4 \, dt$$

$$d = \frac{2t^2}{2} + 4t + c$$

32=$4^2 + 4 * 4 + c$

C=0

$$d = t^2 + 4t \Longrightarrow d = 100 + 40 = 140 \, m$$