وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الشمالية
المعهد التقني/ الموصل

الحقيبة التعليمية

القسم العلمي: تقنيات البيئة والموارد المائية

اسم المقرر: التفاضل والتكامل

المرحلة / المستوى: الاول

الفصل الدراسي: الثاني

السنة الدراسية: 2024 - 2025

معلومات عامة

اسم المقرر:	**التفاضل والتكامل**						
القسم:	تقنيات الموارد المائية						
الكلية:	المعهد التقني الموصل						
المرحلة / المستوى	الاول						
الفصل الدراسي:	الثاني						
عدد الساعات الاسبوعية:	نظري	2	عملي				
عدد الوحدات الدراسية:	2						
الرمز:	MIT103						
نوع المادة	نظري	✓	عملي		كلهما		
هل يتوفر نظير للمقرر في الاقسام الاخرى	نعم						
اسم المقرر النظير	الرياضيات						
القسم	جميع الأقسام التكنلوجية						
رمز المقرر النظير							

معلومات تدريسي المادة

اسم مدرس (مدرسي) المقرر:	الاء عماد حميد
اللقب العلمي:	**مدرس**
سنة الحصول على اللقب	
الشهادة :	**ماجستير**
سنة الحصول على الشهادة	
عدد سنوات الخبرة (تدريس)	**13**

الوصف العام للمقرر

تطوير إمكانية الطالب في استخدام الرياضيات في التطبيقات العملية والاستفادة منها في الدروس التقنية الأخرى وتعليم الطالب الطرق المختلفة في تمثيل المعادلات والقوانين الرياضية في مجالات الحاسوب

الاهداف العامة

- اكتساب فهم شامل للمفاهيم الأساسية في الرياضيات، مثل الأعداد، والعمليات الحسابية، والجبر، والهندسة، والإحصاء.
- **تطوير مهارات حل المشكلات:**
- تحسين القدرة على حل المشكلات الرياضية بطرق منطقية ومنهجية.
- تطبيق تقنيات وأدوات الرياضيات لحل مسائل معقدة في سياقات متنوعة.
- **اكتساب مهارات التفكير التحليلي:**
- تنمية القدرة على التفكير النقدي والتحليلي باستخدام الرياضيات.
- تحليل المشكلات وتفكيكها إلى أجزاء أصغر لفهمها وحلها بشكل أكثر فعالية.

الأهداف الخاصة

فهم وتحليل الجبر:

- حل المعادلات والمتباينات الجبرية.
- فهم وتطبيق القوانين الجبرية مثل قوانين توزيع الضرب، وجمع وطرح العبارات الجبرية.

دراسة وتطبيق المفاهيم الهندسية:

- فهم أساسيات الهندسة مثل الأشكال الهندسية، والزوايا، والمثلثات، والمستطيلات.
- تطبيق القوانين الهندسية لحساب المساحات والحجوم.

فهم وتطبيق مفاهيم التحليل:

- تعلم كيفية التعامل مع الدوال والمعادلات الرياضية.
- دراسة مشتقات الدوال وتكاملها وتطبيقها في مسائل حساب التفاضل والتكامل.

تطبيق مبادئ الإحصاء والاحتمالات:

- فهم أساسيات الإحصاء مثل المتوسطات، والانحراف المعياري، والتوزيعات.
- دراسة مبادئ الاحتمالات وكيفية حساب الاحتمالات لمتغيرات معينة.

تحليل ودراسة نظم المعادلات:

- حل نظم المعادلات الخطية وغير الخطية.
- تطبيق أساليب الحل مثل طريقة التعويض وطريقة الحذف.

فهم وتحليل الدوال والمتغيرات:

- دراسة أنواع الدوال المختلفة مثل الدوال الخطية والدوال التربيعية.
- تحليل خصائص الدوال مثل القيم العظمى والصغرى، والتزايد والتناقص.

الأهداف السلوكية او نواتج التعلم

نواتج تعلم مقرر دراسي في الرياضيات تحدد المهارات والمعرفة التي يتوقع من الطلاب اكتسابها بنجاح بعد إتمام الدراسة. تركز هذه النواتج على تطوير مهارات التحليل والتطبيق والاستدلال في الرياضيات. إليك بعض نواتج التعلم الشائعة لمقرر دراسي في الرياضيات:

1. **فهم المفاهيم الرياضية الأساسية:**
   - التعرف على المبادئ الأساسية في الرياضيات مثل الأعداد، والعمليات الحسابية، والجبر، والهندسة، والتفاضل والتكامل، والإحصاء.
   - فهم كيفية تطبيق هذه المفاهيم في سياقات مختلفة.
2. **تطوير مهارات حل المشكلات:**
   - القدرة على تحليل المشكلات الرياضية وتطبيق استراتيجيات حل مناسبة.
   - استخدام الأساليب الرياضية المختلفة لحل مسائل معقدة وتفسير النتائج بوضوح.
3. **إتقان الجبر والمعادلات:**
   - حل المعادلات والمتباينات الجبرية بمستويات مختلفة من التعقيد.
   - فهم وتطبيق قوانين الجبر وتحليل العبارات الجبرية.
4. **فهم وتحليل المفاهيم الهندسية:**
   - دراسة الأشكال الهندسية، والزاويا، والمساحات، والحجوم.
   - تطبيق القوانين الهندسية لحساب المساحات والحجوم وفهم خصائص الأشكال الهندسية.
5. **تطبيق التحليل والتفاضل والتكامل:**
   - استخدام مبادئ التفاضل والتكامل في تحليل الدوال وحساب المشتقات والتكاملات.
   - تطبيق تقنيات التحليل لحل المشكلات العملية وتفسير النتائج.
6. **تطبيق مبادئ الإحصاء والاحتمالات:**
   - تحليل البيانات باستخدام أدوات إحصائية مثل المتوسطات والانحراف المعياري والتوزيعات.
   - حساب احتمالات الأحداث واستخدام المبادئ الإحصائية لتفسير البيانات.
7. **حل نظم المعادلات:**
   - حل نظم المعادلات الخطية وغير الخطية باستخدام تقنيات مختلفة مثل التعويض والحذف.
   - فهم تطبيقات نظم المعادلات في المشكلات الواقعية.

المتطلبات السابقة

- **يجب على الطالب ان يكون على معرفة بالعمليات الحسابية وكيفية التعامل مع الدوال المثلثية**

الأهداف السلوكية او مخرجات التعليم الأساسية		الية التقييم
ت	**فهم وتطبيق مفاهيم التحليل:**	الامتحانات اليومية والشهرية ونهاية المقرر
1	تعلم كيفية التعامل مع الدوال والمعادلات الرياضية.	الامتحانات اليومية والشهرية ونهاية المقرر
2	دراسة مشتقات الدوال وتكاملها وتطبيقها في مسائل حساب التفاضل والتكامل.	الامتحانات اليومية والشهرية ونهاية المقرر
3	**تطبيق مبادئ الإحصاء والاحتمالات:**	الامتحانات اليومية والشهرية ونهاية المقرر
4	فهم أساسيات الإحصاء مثل المتوسطات، والانحراف المعياري، والتوزيعات.	الامتحانات اليومية والشهرية ونهاية المقرر

أساليب التدريس (حدد مجموعة متنوعة من أساليب التدريس لتناسب احتياجات الطلاب ومحتوى المقرر)

	الاسلوب او الطريقة	مبررات الاختيار
1.	المحاضرات النظرية	المقرر نظري
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

المحتوى العلمي

اسم المادة	باللغة العربية	**التفاضل والتكامل**	السنة الدراسية الاولى	عدد الساعات الاسبوعية			
	باللغة الانكليزية	**Integration and differentiation**		نظري	عملي	المجموع	عدد الوحدات
لغة التدريس للمادة		انكليزي	المستوى الاول الفصل الثاني (الدروس الاجبارية)	2	----	2	2

المفردات النظرية

الأسبوع	تفاصيل المفردات
2-1	التفاضل - المشتقة
4-3	تفاضل الدالة الضمنية
6-5	قواعد اشتقاق الدوال المثلثية
7	الدالة الاسية
8	تطبيقات على المشتقة
9	تطبيقات التفاضل في مجال الري السرعة والتعجيل
11-10	التكامل غير المحدود - للدوال الجبرية
12	تكامل الدوال اللوغارتيمة والاسية والمثلثية
14-13	التكامل المحدود – تطبيقاته على الدوال المختلفة
15	المساحة تحت المنحنى – المساحة بين منحنين مع تطبيقات في مجال الري

التفاضلDifferential

أنواع الدوال:

1- الدوال الجبرية $y = f(x)$
2- دوال ليست جبرية (الدوال المتسامية) وتنتمي اليها الدوال المثلثية مثل $y = \sin x$
3- الدوال العكسية $y = \sin^{-1} x$
4- الدوال اللوغاريتمية $y = \ln x$
5- الدوال الاسية $y = e^x$

المشتقةDerivatives

صيغ الاشتقاق:

1) $y = u^n$

$$\frac{dy}{dx} = n.u^{n-1}.\widehat{u}$$

2) $y = (u - a)^n$

$$\frac{dy}{dx} = n.(u - a)^{n-1}.\widehat{u}$$

3) $y = u.v$

$$\frac{dy}{dx} = u * \widehat{v} + v * \widehat{u}$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين: تساوي الدالة الأولى * مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية * مشتقة الدالة الأولى.

4) $y = \frac{u}{v}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v.\widehat{u} - u.\widehat{v}}{v^2}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين تساوي: $\frac{\text{المقام*مشتقة البسط}-\text{البسط*مشتقة المقام}}{\text{المقام تربيع}}$

5) $y = u_1 + u_2$

$$\frac{dy}{dx} = u_1 + u_2$$

6) $y = c$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Examples

1) $y = 3$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

2) $y = x$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

3) $y = 3x^2 - 5x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 5$$

4) $y = 8x$

$$\frac{dy}{dx} = 8$$

5) $y = \frac{2x+1}{x^3-x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 - x) * 2 - [(2x + 1) * (3x^2 - 1)]}{(x^3 - x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 2x) - (6x^3 - 2x + 3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 - 3x^2 + 1}{(x^3 - x)^2}$$

6) $y = (2x^2 - 5x + 3)^{10}$

$$\frac{dy}{dx} = 10(2x^2 - 5x + 3)^9 * (4x - 5)$$

7) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 1}$

$$y = (x^3 - 3x + 1)^{1/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x^3 - 3x + 1)^{-2/3} * (3x^2 - 3)$$

8) $y = 6\sqrt{3x^2 + 4}$

$$y = 6 * (3x^2 + 4)^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 * \frac{1}{2}(3x^2 + 4)^{-1/2} * (6x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{18x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$$

9) $y = 3x^2 - 5x + 9$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 5$$

10) $y = (x^2 + 1) * (x^3 + 3)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1) * (3x^2) + (x^3 + 3) * (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

Find $\frac{dy}{dx}$

1) $y = \sqrt{x^2 + 1}$
2) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$
3) $y = \frac{2+x}{2x-1}$
4) $y = \sqrt{2x}$
5) $y = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$
6) $y = (\frac{x+1}{x-1})^2$
7) $y = \frac{x^3-2}{\sqrt{x}}$
8) $y = (x^3 + 3x^2 + 5)^2$
9) $y = x^2 * \sqrt{x^3 + 1}$

قاعدة السلسلة (دالة الدالة) (الدالة المركبة) (Chain Rule)

If $y = f(t), t = f(x)$

$\frac{dy}{dt} =$, $\frac{dt}{dx} =$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx}$

Ex (1): find $\frac{dy}{dx}$

$y = 3u^2 + 1$

$u = 2x - 3$

$\frac{dy}{du} = 6u$

$\frac{du}{dx} = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$
$$= 6u * 2$$
$$\frac{dy}{dx} = 12u$$
$$\frac{dy}{dx} = 12 * (2x - 3) = 24x - 36$$

Ex (2):

If you know

$u = 8 - 3x^3 + 2$

$y = u^{100}$

Find $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{du} = 100u^{99}$

$\frac{du}{dx} = -9x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = 100u^{99} * -9x^2$

$\frac{dy}{dx} = -900x^2 * (8 - 3x^3 + 2)^{99}$

Ex (3):

If you know

$u = x^2 - x + 4$

$y = u^{23}$

Find $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{du} = 23u^{22}$

$\frac{du}{dx} = 2x - 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = 23u^{22} * (2x - 1)$

$\frac{dy}{dx} = 23(x^2 - x + 4)^{22} * (2x - 1)$

H.W.-1-

$z = x^2 + 1$

$y = z^{3/2}$

Find $\frac{dy}{dx}$

H.W.-2-

$w = 3x$

$y = w^2 - w^{-1}$

Find $\frac{dy}{dx}$

تفاضل الدالة الضمنية Impact function:

الدالة الضمنية: هي تلك الدالة التي لا يمكن استخراج أحد المتغيرين من الدالة بدلالة المتغير الاخر، (لا نستطيع فصل المتغيرات عن بعضها البعض).

نضع y بعد كل اشتقاق ل $\frac{dy}{dx}$

EX:(1)

$$x^4.y - 2x^2 = 3y^{-3}$$

$$x^4.\frac{dy}{dx} + y * 4x^3 - 4x = -9y^{-4}.\frac{dy}{dx}$$

$$x^4.\frac{dy}{dx} + 9y^{-4}.\frac{dy}{dx} = 4x - 4yx^3$$

$$(x^4 + 9y^{-4})\frac{dy}{dx} = 4x - 4yx^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 4yx^3}{x^4 + 9y^{-4}}$$

EX:(2)

$$y^4 - xy^2 + x^2 - 2 = 0$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - \left[x.2y.\frac{dy}{dx} + y^2 * 1\right] + 2x = 0$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - -2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + 2x = 0$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - -2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 2x$$

$$(4y^3 - 2xy)\frac{dy}{dx} = y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2x}{4y^3 - 2xy}$$

قواعد اشتقاق الدوال المثلثية

$$y = sinx \rightarrow \frac{dy}{dx} = cosx$$

$$y = cosx \rightarrow \frac{dy}{dx} = -sinx$$

$$y = tanx \rightarrow \frac{dy}{dx} = sec^2x$$

$$y = secx \rightarrow \frac{dy}{dx} = secx\ tanx$$

$$y = cscx \rightarrow \frac{dy}{dx} = -cscx\ cotx$$

$$y = cotx \rightarrow \frac{dy}{dx} = -csc^2x$$

Examples:

1) $5y^2 + siny = x^2$

$10y.\frac{dy}{dx} + cosy * \frac{dy}{dx} = 2x$

$\frac{dy}{dx}(10y + cosy) = 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y+cosy}$

2) If $y = \cos t \quad x = sin\ t$

$find\ \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dt} = -\sin t\ ,\ \frac{dx}{dt} = \cos t \rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx}$

$= -\sin t * \frac{1}{\cos t}$

$\frac{dy}{dx} = -\tan t$

3) $y = \sin(x+1)$

$\frac{dy}{dx} = \cos(x+1)$

4) $y = \cos 5x$

$\frac{dy}{dx} = -\sin 5x * 5 = -5\sin 5x$

5) $\tan(2-x) = y$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2(2-x) * -1$

$\frac{dy}{dx} = -\sec^2(2-x)$

6) $y = \sec(2x-1)$

$\frac{dy}{dx} = \sec(2x-1)\ \tan(2x-1) * 2$

$\frac{dy}{dx} = 2\sec(2x-1)\ \tan(2x-1)$

7) $y = \csc(x^2 + 7x)$

$\frac{dy}{dx} = -\csc(x^2+7x) * \cot(x^2+7x) * (2x+7)$

8) $y = \sec^2 x - \tan^2 x$

$\frac{dy}{dx} = 2\sec x * \sec x.\tan x - 2\tan x.\sec^2 x$

$= \ 2\,sec^2x\,tanx - 2\,sec^2x\,tanx$

$\frac{dy}{dx} = 0$

9) $y = \ sin^3x$

$\frac{dy}{dx} = \ 3sin^2x \ * \ cosx$

10) $y = cos(sin\ x)$

$\frac{dy}{dx} \ = \ -sin(sin\ x) \ * \ cos\ x$

11) $y \ = \quad (csc\ x \ + \ cot\ x)^{-1}$

$\frac{dy}{dx} = -1\ (csc\ x \ + \ cot\ x)^{-2} * \ (-csc\ x\ cot\ x - \ csc2\ x)$

$= \frac{\csc x\,(\cot x+\csc x)}{(\csc x+\cot x)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\csc x}{\csc x+\cot x}$

12) $y = \sin\frac{x-2}{x+3}$

$\frac{dy}{dx} = cos\frac{x-2}{x+3} * \frac{x+3-(x-2)}{(x+3)^2}$

$\frac{dy}{dx} = cos\frac{x-2}{x+3} * \frac{5}{(x+3)^2}$

13) $y = sin^2\,(3x-2)$

$\frac{dy}{dx} = 2\sin(3x-2) * \cos(3x-2) * 3$

$\frac{dy}{dx} = 6\sin(3x-2)\cos\,(3x-2)$

14) $y = (1 + \cos 2x)^2$

$\frac{dy}{dx} = 2(1 + \cos 2x) * -\sin 2x * 2$

$\frac{dy}{dx} = -4 \sin 2x \ (1 + \cos 2x)$

15) $y = sin(cos(2x - 5)\ )$

$\frac{dy}{dx} = cos[\cos(2x - 5)]$ * -sin (2x-5) * 2

$\frac{dy}{dx} = \ -2 \sin(2x - 5) \cos\ (\cos x(2x - 5))$

16) Find $y"$

$y = \tan x$

$y^{-} = sec^2 x$

$y" = 2 \sec x * \sec x \,.\, \tan x$

$y" = 2\ sec^2 x\ \tan\ \ x$

الدالة الاسية

The exponential function

* مشتقة الاس * مشتقة الدالة الاسية =الدالة الاسية نفسها lnمشتقة الأساس، Lne=1

Example:

1) $y = e^{3x}$

$\frac{dy}{dx} = e^{3x} * 3 = 3e^{3x}$

2) $y = x\, e^x$

$\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x$

3) $y = e^x . x^3$

$\frac{dy}{dx} = e^x . 3x^2 + x^3 e^x$

4) $y = x^5 e^x$

$\frac{dy}{dx} = x^5 . e^x + e^x * 5x^4$

5) $y = \frac{x^4}{e^x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x * 4x^3 - x^4 * e^x}{(ex)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 e^x - x^4 e^x}{e^{2x}}$

6) $y = \sqrt{xe^x + 3x}$

$y = (xe^x + 3x)^{1/2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(xe^x + 3x)^{1/2} * (xe^x + e^x + 3)$

7) $y = (2x - 1)e^{2x}$

$\frac{dy}{dx} = (2x - 1) * e^{2x} . 2 + e^{2x} * 2$

$\frac{dy}{dx} = (4x - 2)e^{2x} + 2e^{2x}$

دالة اللوغاريتم الطبيعي:

$y = \ln x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

مشتقة ال ln بعد مشتقة ما = ln $\frac{1}{\text{مابعد } ln}$ *

Example:

1) $y = \ln(2x + 7)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x+7}$ * 2x

2) $y = \ln(x^2 + 8)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+8}$* 2x

3) $y = \ln(lnx)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{lnx} . \frac{1}{x} = \frac{1}{x.lnx}$

4) y = ln x^x

y = x ln x

dy = x. $\frac{1}{x} + \ln x$

$\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$

5) y = ln 5 x^2

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5*x^2}$. 10 x

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$

6) y = ln 3x

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x} . 3 = \frac{1}{x}$

7) y = ln sin 5 x

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin 5x}$ cos 5x * 5

$\frac{dy}{dx} = \frac{5\cos 5x}{\sin 5\,x}$ = 5 cot 5x

8) y = ln (sin e^{x})

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin e^{x}}$ * cos e^{x} . e^{x}

$\frac{dy}{dx}$ = e^{x} cot e^{x}

9) y = $\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x}}$

Y = $\frac{e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{e^{-2x}}{e^{2x}}$

Y = 1 + e^{-4x}

$\frac{dy}{dx} = 0 + e^{-4x} * -4$

$\frac{dy}{dx} = -4\, e^{-4x}$

10) y = sec $\sqrt{e^{2x} + 1}$

Put u = e^{2x+1}

Y = sec $\sqrt{u}$

$\frac{dy}{du}$ = sec $\sqrt{u}$. tan $\sqrt{u}$ * $\frac{1}{2}$ $u^{-1/2}$

$\frac{du}{dx} = e^{2x}$. 2

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx}$ = sec $\sqrt{u}$ tan $\sqrt{u}$ * $\frac{1}{2}$ $u^{-1/2}$ * 2 e^{2x}

$\frac{dy}{dx}$ = sec $\sqrt{e^{2x}+1}$ tan $\sqrt{e^{2x}+1}$ * e^{2x} * $(e^{2x+1})^{-1/2}$

11) y = x^2 *ln (2 x)

Y/ = x^2 * $\frac{1}{2x}$ * 2 + ln (2x) * 2x

Y/ =x + 2x ln (2x)

12) y = ln (tan x + sec x)

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x+\sec x}$ * ($\sec^2$ x + sec x tan x)

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x+\sec x}$ * sec x (sec x + tan x)

$\frac{dy}{dx}$= sec x

اشتقاق الدالة الاسية من نوع a^x

Y = a^x

$\frac{dy}{dx} = a^u . \ln a . \frac{du}{dx}$

* الاساس * الدالة الاسية نفسهاlnمشتقة اي دالة اسية هي مشتقة الاس

Example:

1. y =3^{x^4}

$\frac{dy}{dx} = 3^{x^4} * 4x^3 * \ln 3$

2. $y = 10^{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = 10^{\ln x} * \frac{1}{x} * \ln 10$$

3. $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$

$$\ln y = \ln (x^2 + 1)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \ \ln (x^2 + 1)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \sin x * \frac{1}{x^2+1} * 2x + \ln (x^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y * [(\sin x \frac{2x}{x^2+1}) + \cos x \ln (x^2+1)]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)^{\sin x} \cdot [(\sin x \frac{2x}{x^2+1}) + \cos x \ln (x^2+1)]$$

ملاحظة:

)ناخذ **x** مرفوع الى اس هو ايضا حالة متغيرة (**x**الايجاد مشتقة أي دالة فيها متغير وليكن الطرفين ثم تطبيق خاصية الرفع. **ln**

4) $\boldsymbol{y = X^{lnx+x}}$

$$\boldsymbol{\ln y = \ln x^{\ln x + x}}$$

$$\mathbf{\ln y = (\ln x + x) * \ln x}$$

$$\mathbf{= (\ln x)^2 + X \ \ln x \ \ln y}$$

$$\mathbf{\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2lnx.}{x} + x. \frac{1}{x} + \ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y(\frac{2lnx.}{x} + \ln x + 1)$$

تطبيقات على المشتقة

ايجاد ميل المماس لمنحني الدالة عند نقطة معينة: -

تمثل ميل المماس عند أي نقطة على المنحني $y = f(x)$ تمثل منحني فان $y = f(x)$ إذا كانت
وتسمى ميل المنحني.

اولا نوجد $\frac{dy}{dx}$

Example 1:

$X^2 + y^2 + 3xy = 1$ at (1, 2) find the tangent eq.

اوجد معادلة المماس

$2x + 2y.\frac{dy}{dx} + 3x.\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

$2x + 3y + \frac{dy}{dx}(2y + 3x) = 0$

$2+6+ (\frac{dy}{dx} * (4 + 3)) = 0$

$\frac{dy}{dx}(7) = -8$

$$\frac{dy}{dx} = M = \frac{-8}{7}$$

معادلة المماس

$y-y_1=M(x-x_1)$

$y-2=\frac{-8}{7}(x-1)$

معادلة العمود

$y-2=\frac{7}{8}(x-1)$

ميل العمود = -(1 / ميل المماس)

Example 2

$4x^2+ 5y^2=21$ at (2,1)

$8x + 10y .\frac{dy}{dx} =0$

$8 * 2 + 10 * 1* \frac{dy}{dx} =0$

$16 = - 10 * \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}$ = M = $\frac{-16}{10} =\frac{-8}{5}$

$Y - 1=\frac{-8}{5} . (X-2)$

$Y - 1= \frac{5}{8} *(x-2)$ معادلة العمود

Example 3

Find the point included to the curve $y = x^2 - 3x + 5$, when the tangent parallel the line its equation is $x - y = 5$

عندما المماس يوازي المستقيم الذي $y = x^2 - 3x + 5$ جد نقطة تنتمي الى المنحني، معادلته $x - y = 5$

$\frac{dy}{dx}$ =M=2x-3

$M=\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}=\frac{-1}{-1}=1$

بما ان المماس يوازي المستقيم، ∴ميلهما متساوي

2x-3=1

2x=4

X=2

Y=4-6+5=3

النقطة هي(2,3)

Example 4

Find the equation of tangent and perpendicular on it for curve

$y = 2x + \frac{3}{x^2+2} \quad at\ x = -1$

جد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للمنحني $y = 2x + \frac{3}{x^2+2} \quad at\ x = -1$

$y = 2 * (-1) + \frac{3}{(-1)^2+2}$ y=-1 النقطة (-1,-1)

Y'=2+$\frac{-3*2x}{(x^2+2)^2}$

Y=-1

النقطة (-1,-1)

Y'=2-$\frac{6x}{(x^2+2)^2}$ =M

Y'=2-$\frac{6*-1}{((-1)^2+2)^2}$

Y'=2+$\frac{6}{9}$ =$\frac{8}{3}$

معادلة المماس

Y+1=$\frac{8}{3}$ $(x + 1)$

3y+3=8x+8

3y+1=$\frac{-3}{8}$ (x+1)

8y+8 = -3x-3

8y + 3x +11=0

Example 5

جد قيمة الثابت c لمعادلة المنحني كي يمس المستقيم y=x

Find the constant C, at the curve function equation to touch the line y=x

$y = X^2 + C$

y=x

بما ان المنحني يمس المستقيم، اذا ميل المنحني =ميل المستقيم

$\frac{dy}{dx} = 2x$ ميل المنحني

$\frac{dy}{dx} = 1 = m$ ميل المستقيم

m المستقيم $= m$ المنحني

M=1=2x

X=$\frac{1}{2}$

Y=x

X=$\frac{1}{2}$

(نقطة التماس هي نقطة مشتركة بين المنحني والمستقيم $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ حداثي نقطة التماس)

فيجب ان تحقق معادلة كلا المنحنيين: -

$\boldsymbol{y = X^2 + C}$

$\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^2 + \boldsymbol{C}$

C=$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\boldsymbol{y = X^2 + \frac{1}{4}}$

تطبيقات التفاضل (المشتقة) في السرعة والتعجيل

If you know that the equation $d = t^3 + t + 5$, is the function of distance at meters and it's the time at second, find the velocity and acceleration at the six second.

تمثل **d** تمثل حركة جسم على خط مستقيم حيث $d = t^3 + t + 5$ **اذا كانت العلاقة** الزمن بالثواني، جد السرعة للجسم في أي زمن، ثم جد موضعه وسرعته **t** الازاحة بالامتار و وتعجيله عند الثانية السادسة من بدء الحركة.

$$d = t^3 + t + 5$$
$$v = 3t^2 + 1$$
$$d = 6^3 + 6 + 5 = 227\text{m}$$
$$v = 3 * 6^2 + 1 = \ 109 \ m/s$$
$$a = 6t = 6 * 6 = 36 \quad m/s^2$$

A body moving in a straight line, find the distance, when the velocity is $\left(1\frac{m}{s}\right)$, $d = \sqrt{2t^2 + 18}$, where d is the distance.

جسم يتحرك بخط مسقيم احسب بعده عندما تكون السرعة 1متر/ثانية

$$\mathbf{d} = \sqrt{2t^2 + 18}$$

$$\dot{\mathbf{d}}(\mathbf{t}) = \mathbf{v} = \frac{1}{2} * (2t^2 + 18)^{-½} \quad * 4\mathbf{t}$$

$$=1\mathbf{V} = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}}$$

$$2\mathbf{t} = \sqrt{2t^2 + 18}$$

$4t^2 = 2t^2 + 18$
$2t^2 = 18$

$t^2 = 9 \rightarrow t = 3$
$d = \sqrt{2t^2 + 18}$

$d = \sqrt{2 * 3^2 + 18}$

$d=\sqrt{36}=6$

التكاملIntegral

هو عملية عكس التفاضل أي هي عملية مراد فيها ايجاد دالة علمت مشتقتها ويرمز العملية التكامل $\int$

$\bar{f}\,(x) = g(x)$

$\int g(x) = f(x) + c$

هو ثابت التكامل cحيث ان

قواعد التكامل غير المحدد: Undifined integral

القاعدة الاولىa) $\int dx = x + c$

القاعدة الثانيةb) $\int x^2\, d = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$1\text{-}\int x^4\ dx = \frac{x^5}{5} + c$

$2\text{-}\int \sqrt{n}\, dx = \int n^{1/2}\, dx = \frac{n^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3} * n^{3/2} + c$

$3\text{-}\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c$

$= \frac{-1}{2x^2} + c$

$4\text{-}\int 6x^2 dx = \frac{6x^3}{3} + c = 2x^3 + c$

c)القاعدة الثالثة $\int [\ f(x) + g(x)]\, dx$

$= \int f(x)dx + \int g(x)\, dx$

5- $\int (6x^2 - 5x + 3)\, dx$

$= \frac{6x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + c$

$= 2x^3 - \frac{5x^2}{2} + 3x + c$

6- $\int \left(t - \frac{2}{t^2} + 3\right) dt$

$= \frac{t^2}{2} - \frac{2t^{-1}}{-1} + 3t + c$

$= \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t} + 3t + c$

D) $\int [f(x)]^n$ القاعدة الرابعة $\overline{f}\ (x\ )$

اذا كانت دالة قابلة الاشتقاق ومرفوعة لاس فيجب توفر مشتقة داخل القوس

7- $\int (x^2 + 3x - 5)^4 (2x + 3)\, dx$

$= \frac{(x^2+3x-5)^5}{5} + c$

8- $\int \frac{6x}{(3x^2+5)^7}\, dx$

$\int (3x^2 + 5)^{-7} . 6x \quad dx$

$= \frac{(3x^2+5)^{-6}}{-6} + c = \frac{-1}{(3x^2+5)^{-6}} + c$

9- $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt[3]{2x^3+6x+5}}$

$\int (x^2 + 1)(2x^3 + 6x + 5)^{-⅓}\, dx$

$\int (x^2 + 1)(2x^3 + 6x + 5)^{-⅓} * \frac{6}{6}\ dx$

$$\frac{(2x^3+6x+5)^{2/3}}{2/3} * \frac{1}{6} + c$$

$$= \frac{1}{6} * \frac{3}{2} * (2x^3+6x+5)^{2/3} + c$$

10- $\int \frac{5x^4+2x}{x^3}\, dx$

$$\int (5x^4+2x).x^{-3}\ \mathrm{dx}$$

$$= \int 5x + 2x^{-2}\ \mathrm{dx}$$

$$= \frac{5x^2}{2} + \frac{2x^{-1}}{-1} + c$$

11- $\int (x^2+2)^7 . x . \mathrm{dx}$ $*\frac{2}{2}$

$$= \frac{1}{8*2}(x^2+2)^8 + c$$

$$= \frac{1}{16}(x^2+2)^8 + c$$

12- $\int \frac{dx}{9x^2+12x+4}$

نلاحظ ان المقام مربع كامل (نحلل بالتجربة)

$$= \int \frac{dx}{(3x+2)^2} = \int (3x+2)^{-2}\mathrm{dx}$$

$$= \frac{1}{3} * \frac{(3x+2)^{-1}}{-1} + \mathrm{c}$$

13- $\int (x+3)(x^2+6x+1)^{5/2}$

$$= \int 2 * (x+3) * \frac{1}{2}(x^2+6x+1)^{5/2}\ \mathrm{dx}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+6x+1)^{7/2} * \frac{2}{7} + c$$

$$= \frac{(x^2+6x+1)^{7/2}}{7} + \mathrm{c}$$

14- $\int x^2 (7-2x^3)^4 \mathrm{dx}$

$$\int x^2 (7-2x^3)^4 * \frac{-6}{-6} dx$$

$$\frac{-1}{6} * \frac{(7-2x^3)^5}{5} + c$$

$$\frac{-1}{30} * (7-2x^3)^5 + c$$

15_ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx$

$$= \int (x^2+9)^{-½} * x * \frac{2}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+9)^{1/2} * 2 + c$$

16- $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$

الدالة الاسية نفسها لكن يجب توفير مشتقة الاس e^x *تكامل*

الاساس ln الدالة الاسية نفسها لكن يجب توفير مشتقة الاس و a^x تكامل

17- $\int e^{2x}\, dx$

$$\frac{1}{2} \int e^{2x} * 2\, dx$$

$$\frac{1}{2} e^{2x} + c$$

18- $\int e^{x^{2-2x+1}} \quad (2x-2)\ dx$

$$= e^{x^2-2x+1} + c$$

19- $\int \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$

$$= \int e^{\sqrt{x-1}} \quad (x-1)^{½} \quad dx$$

$$= 2e^{\sqrt{x-1}} + c$$

20- $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ $\quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

$$\frac{d}{dx} e^x + e^{-x} = e^x - e^{-x}$$

البسط هو مشقة المقام

$$= ln(e^x + e^{-x}) + c$$

21- $\int \frac{x}{(x+1)} dx$

$$= \int \frac{x+1-1}{x+1} dx$$
$$= \int \frac{x+1}{x+1} - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= dx - \frac{1}{x+1} dx$$
$$= x - \ln(x+1) + c$$

22- $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx$

$$= \int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})} dx$$
$$= \int dx - \int \sqrt{x}\ dx$$
$$= x - x^{3/2} * \frac{2}{3} + c$$

23- $\int \sin 3x \quad dx$

يجب توفير مشتقة الزاوية

$$= \frac{-1}{3} \cos 3x + c$$

24- $\int (\sin x)^2 \cos x \quad dx$

$$= \frac{(\sin x)^3}{3} + c$$

25- $\int (1 - \sin^2(3t)) \quad \cos 3t \quad dx$

$$\int (\cos 3t - \sin^2(3t) \cos 3t)\, dx$$
$$\frac{1}{3} \sin 3t - \frac{1}{3} \quad \frac{\sin^3(3t)}{3} + c$$

26- $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

$$= \int \cos x^{1/2} * x^{-1/2} dx$$
$$= -2 \sin \sqrt{x} + c$$

27- $\int \sin x \cos x \,[\sin x + \cos x]\, dx$

$$= \sin^2 x \cos x + \cos x^2 \sin x \, dx$$
$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

28- $\int \frac{t^2-2t^4}{t^4} dx$

$= \frac{t^2}{t^4} - \frac{2t^4}{t^4} dt$

$= t^{-2} dt - 2dt$

$\frac{t^{-1}}{-1} - 2t + c$

29- $\int \frac{dy}{cscy} = \int \sin y \ dy = -\cos y + c$

30- $\int \sin(x+9)\, dx = -\cos(x+9) + c$

31- $\int \frac{1}{x^2} + \sec^2 \pi x \, dx$

$\int \frac{dx}{x^2} + \int \sec^2 \pi \, dx$

$= \frac{-1}{x} + \frac{1}{\pi} \tan \pi x + c$

32- $\int 2^x \, dx = \frac{2x}{ln2} + c$

33- $\int x^2 e^{x^3} \, dx$

$= \frac{1}{3} e^{x^3} + c$

34- $\int x\sqrt{x^2-2} \, dx$

$= \frac{1}{2} (x^2-2)^{3/2} * \frac{2}{3} + c$

$= \frac{1}{3} (x^2-2)^{3/2} + c$

35- $\int \frac{e^x}{e^x+3} \, dx$

$= \ln(e^x + 3)$

$\frac{d}{dx} \ln e^x + 3$

$= \frac{1}{e^x+3} * e^x$

التكامل المحدد: -

1) $\int_a^b c \, dx$

$= cx \Big|_a^b$

$= cb - ca$

2) $\int_2^5 (x+5)\, dx$

$$=\frac{x^2}{2}+5x\Big|_2^5$$

$$=\frac{25}{2}+25-\left(\frac{4}{2}-10\right)$$

$$=25.5$$

3) $\int_0^1(x^2+3x)\,dx$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{2+9}{6}=\frac{11}{6}$$

4) $\int_1^3(2x^2+5x)^3\,(4x+5)\,dx$

$$=\frac{(2x^2+5x)^3}{3}\Big|_1^3$$

$$=\frac{(2*3^2+15)^3}{3}-\frac{2+5}{3}$$

5) $\int_1^3(2x^2+6x)^2\,(2x+3)\,dx$

$$\frac{1}{2}\frac{(2x^2+6x)^3}{3}\Big|_1^3$$

6) $\int_0^1(x^3+1)^2\Big|_1^3\,dx$

$$=\int_0^1 x^6+2x^3+1=\frac{x^7}{7}+\frac{2x^4}{4}+x\Big|_0^1$$

Example:

Find the curve equation, which that its tangent is $4x^3+18x^2+8x+3$, and pass the point (1, 11)

اوجد معادلة المنحني الذي ميله $4x^3+18x^2+8x+3$) ويمر بالنقطة (1,11

$$\frac{dy}{dx}=4x^3+18x^2+8x+3=M$$

$$dy = (4x^3 + 18x^2 + 8x + 3)\,dx$$

$$Y=\int (4x^3 + 18x^2 + 8x + 3)dx$$

$$Y=4*\frac{x^4}{4} + \frac{18}{3}x^3 + \frac{8x^2}{2} + 3x + c$$

$$11=1+6+4+3+c$$

$$C=-3$$

$$Y=x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 3x - 3$$

Example:

Find the curve equation, which that its tangent is m= $x * (x+5)^2$, and pass the point (2, 1)

وجد معادلة المنحني الذي ميله m= $x * (x+5)^2$ ويمر بالنقطة (2, 1)

$$\frac{dy}{dx} = x * (x^2 + 10\,x + 25) = M$$

$$dy = (x^3 + 10x^2 + 25x)\,dx$$

$$Y=\int (x^3 + 10x^2 + 25x)\,dx$$

$$Y=*\frac{x^4}{4} + \frac{10}{3}x^3 + \frac{25x^2}{2} + c$$

Area under curve

المساحة تحت المنحني

1) Area between $f(x)$ and x-axis

$$A=\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\ \ dx$$

المساحة بين المنحني و x-axis

$$A=\int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b x\ \ dy$$

المساحة بين المنحني و y-axis

2) Area between two curves

$$y_1 = f(x_1),\ \ y_2 = f(x_2)$$

$$A = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx \quad \text{x-axis}$$

$$x_1 = g(y_1),\qquad x_2 = g(y_2)$$

$$A = \int_a^b (x_1 - x_2)\,dy \quad \text{y-axis}$$

ملاحظات: -

1) إذا اعطانا دالة وحدود تكامل فالحل يكون مباشر.
2) إذا اعطانا دالتين بدون حدود تكامل نقاطع الدالتين
3) إذا اعطانا دالة فقط بدون حدود، فالحل يكون بالاعتماد على المحور، فاذا اعطى المساحة بالنسبة للمحور x ضيف معادلة y=0، وإذا اعطى المساحة بالنسبة للمحور y، نضيف معادلة x=0 ثم تقاطع الدالتين.

Ex1:

Find the area between the curves Y=2x and x-axis from x=0 to x=2

$$A = \int_a^b y \ dx = \int_0^2 2x$$

$$A = \frac{2x^2}{2} \Big|_0^2 = 4 \ unite^2$$

Ex2: Find the area between the curve $y=x^2$ and line y=3x.

$$y=x^2, y=3x$$

$$x^2 = 3x \Longrightarrow x^2 = 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0, x = 0, x = 3$$

$$A = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$$

$$A = \int_0^3 3X - x^2 \ dx$$

$$= \frac{3X^2}{2} - \frac{X^3}{3} \Big|_0^3$$

$$= \frac{3*9^2}{2} - \frac{3^3}{3}$$

$$=13.5\text{-}9=4.5 \ Unite^2$$

Ex3: Find the area between the curve $\boldsymbol{y = x(x^2 - 4)}$ ***and x_axis***

$$y = x(x^2 - 4)$$

$$y = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0, x = \mp 2$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \int_{-2}^0 X(x^2 - 4) + \int_0^2 X(x^2 - 4)$$

$$= \int_{-2}^0 X^3 - 4X + \int_0^2 X^3 - 4X$$

$$= \frac{X^4}{4} - \frac{4x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{X^4}{4} - \frac{4x^2}{2} \Big|_0^2$$

$$A|4| + |-4| = 8 \ unite^2$$

طول القوس او طول المنحنيLength of curve

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

1) If y=x Find the length of curve from x=1 to x=3

Y=x

$$\frac{dy}{dx}=1,\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$$

$$L=\int_1^3 \sqrt{2}\ \ dx$$

$$L=\sqrt{2}\ x\ |_1^3$$

2) Find the length of curve $y=3x^{3/2}-1$ for x=0, x=1

$$\frac{dy}{dx}=3*\frac{3}{2}x^{½}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{9}{2}x^{½}\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{81}{4}x$$

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+\frac{81}{4}x}\ \ dx$$

$$L=\frac{4}{81}*\frac{2}{3}\left(1+\frac{21}{4}x\right)^{3/2}|_0^1$$

$$=\frac{8}{243}\left[\left(1+\frac{21}{4}x\right)^{3/2}-1\right]$$

L=3.192 unite

3) Find the length of curve:

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - 1 \; for \; 0 \le x \le 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} * \sqrt{2} * \frac{3}{2} * x^{½} = 2\sqrt{2}x^{½}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(2\sqrt{2}x^{½}\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + 8x$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + 8x} \; dx$$

$$(1 + 8x)^{3/2} * \frac{2}{3} * \frac{1}{8} |_0^1$$

$$= \frac{1}{12}\left[(1 + 8)^{3/2} - 1\right]$$

$$L = 2{,}167 \; unite$$

تطبيقات على التكامل: -

1) If 2t+4 is equation of velocity of body, find the distance at any time, if you know the distance is 32m at 4 second, find the distance after ten second

$$v = 2t + 4$$

$$d = \int 2t + 4\, dt$$

$$d = \frac{2t^2}{2} + 4t + c$$

$32 = 4^2 + 4 * 4 + c$

C=0

$$d = t^2 + 4t \Longrightarrow d = 100 + 40 = 140\, m$$