الفصل الخامس
مقاييس التشتت
Measures of Dispersion

١,٥ مقدمة:

تناولنا في الفصل السابق المتوسطات أو مقاييس النزعة المركزية والتي تعبر عن المستوى العام للظاهرة السياسية أو الاجتماعية محل البحث. ولكن ترى هل هذا يعتبر كافياً لوصف البيانات وتحليلها كمياً لنصل بالتالي إلى فهم أكثر وضوحاً للظاهرة محل الدراسة ؟ للإجابة على هذا السؤال نسوق المثال التالي :

مثال ١ :

نفترض أن لدينا شريحتين من شرائح المجتمع تعيشان في منطقتين مختلفتين وكانت دخولهم الأسبوعية (بالدولار الأمريكي) هي كما يلي :

المجموعة الأولى A :

70	75	71	75	74	76	73	78

المجموعة الثانية B :

99	56	80	100	29	70	65	93

وبحساب الوسط الحسابي للشريحتين المذكورتين في كل من المجموعتين – حسب ما أوضحناه في الفصل السابق – فإن الوسط الحسابي لدخول المجموعة الأولى :

$$\overline{X}_A = \frac{70+75+71+75+74+76+73+78}{8}$$

$$\overline{X}_A = \frac{592}{8} = 74 \text{ دولاراً}$$

أي أن الوسط الحسابي لدخل المجموعة A هو 74 دولاراً.

وكذلك بالنسبة للمجموعة B فإن الوسط الحسابي لدخولها هو :

$$\overline{X}_B = \frac{99+56+80+100+29+70+65+93}{8}$$

$$\overline{X}_B = \frac{592}{8} = 74 \quad \text{دولاراً}$$

والوسط الحسابي لدخل المجموعة B هو أيضاً 74 دولاراً.

ومعنى هذا أن المستوى العام لدخل الأفراد في المجموعتين واحد ويساوي 74 دولاراً. ولكن بإمعان النظر في دخول المجموعة الأولى نجد أنها متجانسة إلى حدٍ كبير أي أنها قريبة جداً من بعضها أو من الوسط الحسابي والذي يساوي 74 دولاراً. وهنا نقول أن تشتت الدخول قليل أو صغير. بينما دخول المجموعة الثانية غير متجانسة فهي بعيدة عن بعضها، أو عن الوسط الحسابي بشكل كبير. وهنا نقول أن تشتت دخول المجموعة الثانية كبير فهي أقل تجانساً (أو أكثر تشتتاً) من المجموعة الأولى.

(الفرق بين أكبر دخل وأصغر دخل في المجموعة الأولى: ٧٨-٧٠ =٨ دولارات فقط، بينما الفرق بين أكبر دخل وأصغر دخل في المجموعة الثانية: ١٠٠- ٢٩-٧١ دولاراً)

نستنتج من هذا المثال بأن المتوسط ليس كافياً لتوصيف البيانات أو تحليلها كمياً. فها هو المتوسط واحد في المجموعتين ورغم ذلك فإن البيانات تختلف تماماً في مدى تشتتها (أو تجانسها). وهنا تبرز الحاجة إلى مقاييس كمية أو إحصائية ليقاس مدى تشتت البيانات ولتعطي للباحث بالتالي صورة أكثر وضوحاً وصدقاً للظاهرة السياسية محل الدراسة. وفيما يلي نتناول بعض مقاييس التشتت التي تخدم الغرض من هذا الكتاب وهي :

المدى، والتباين والانحراف المعياري، ومعامل اختلاف

٢,٥ المدى The Range

يعرّف المدى بأنه " الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة ".

فمدى المجموعة A في المثال رقم (١) هو : 8 = 70 – 78

ومدى المجموعة B في نفس المثال هو : 71 = 29 – 100

وواضح تماماً أن مدى المجموعة الثانية أكبر بكثير جداً من مدى المجموعة الأولى مما يعني أن المجموعة الثانية أكثر تشتتاً من المجموعة الأولى.

ومن تعريف المدى يتضح أنه مقياس بسيط جداً وأن كل المطلوب معرفته هو أكبر قيمة وأصغر قيمة فقط. ومن هذا التعريف نخرج بالملاحظات التالية :

١ – أن المدى يعتمد في حسابه على قيمتين فقط (أكبر قيمة وأصغر قيمة) وأنه يهمل بالتالي باقي القيم.

٢ – أنه لا يقيس تشتت البيانات عن متوسطها، فهو لا يشير – من قريب أو من بعيد – إلى متوسط البيانات (أو مركزها).

٣ – أنه حساس جداً لأي قيمة شاذة أو متطرفة والمثال التالي يوضح هذه النقطة بشيء من التفصيل.

مثال (٢) :

إذا كانت أعمار أعضاء السلطة التشريعية في بلد ما هي :

72 78 20 74 73 75 70

فإن المدى في هذه الحالة هو : 78 – 20 = 58

وهنا نلاحظ وجود قيمة شاذة بالنسبة لباقي القيم وهي 20 وهي أصغر قيمة. وإذا أهملت هذه القيمة (أو لم تكن موجودة أصلاً) لكان المدى :

78 – 70 = 8

وهذا يعني أن وجود قيمة شاذة (20) رفعت قيمة المدى من 8 سنوات إلى 58 سنة. وهذا يوضح مدى حساسية هذا المقياس للقيم الشاذة (أو المتطرفة).

ولكل هذه الأسباب – أو الملاحظات – فإن كثيراً من الإحصائين والباحثين لا يعتمدون كثيراً على المدى كمقياس للتشتت. ويستخدم فقط إذا كان المطلوب فكرة سريعة أو عامة (وليست دقيقة) عن مدى تشتت البيانات.

٣,٥ التباين The Variance :

يعتبر التباين أحد مقاييس التشتت المهمة لأنه من ناحية يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه، ومن ناحية أخرى لأنه يقيس التشتت عن الوسط الحسابي للقيم، هذا بالإضافة إلى أنه تسهل معالجته رياضياً، وأنه يدخل في تكوين عدد من المقاييس والاختبارات الإحصائية المهمة.

والفكرة الأساسية للتباين هي حساب إنحرافات جميع القيم عن وسطها الحسابي (أي حساب الفرق بين كل قيمة والوسط الحسابي)، وسوف نجد أن بعض القيم أكبر من الوسط فتكون الفروق (أو الإنحرافات) بالموجب، والبعض الأخر أصغر من الوسط فتكون الفروق (أو الإنحرافات) بالسالب. ودائماً يكون مجموع هذه الإنحرافات مساوياً للصفر. ويكون الحل هنا إما إهمال الإشارات السالبة أو تربيع هذه الإنحرافات. وإهمال الإشارات السالبة ليس له مبرر رياضي، فيكون الحل هو تربيع هذه الإنحرافات، ثم نحسب متوسط الانحرافات المربعة فنحصل على التباين. أي أن التباين يعرف كما يلي:

التباين : هو متوسط مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي. والمثال التالي يوضح كيفية حساب التباين.

مثال (٣) :

أحسب تباين دخول الشريحية الاجتماعية التالية : مثال رقم (١) :

70 75 71 75 74 76 76 78

الحل :

١ – نحسب أولاً الوسط الحسابي للدخول كما يلي :

$$\overline{X} = \frac{592}{8} = 74$$

٢ – نحسب إنحرافات القيم عن الوسط الحسابي (أي الفروق بينها وبين الوسط الحسابي) كما يلي :

$$-4 , +1 , -3 , +1 , 0 , +2 , -1 , +4$$

(لاحظ أن مجموع الانحرافات يساوي صفر)

٣ – نربع هذه الانحرافات كما يلي :

16 1 9 1 0 4 1 16

٤ – التباين يساوي متوسط هذه المربعات، أي يساوي :

$$\frac{16+1+9+1+0+4+1+16}{8}=\frac{48}{8}=6$$

٤,٥ الإنحراف المعياري : Standard Deviation :

نلاحظ أن تمييز التباين سيكون " دخول مربعة " وبصفة عامة " وحدات مربعة " لأنه يتم تربيع الانحرافات (أو الفروق). لذلك فإنه يؤخذ الجذر التربيعي الموجب للتباين فنحصل على ما يسمى " الإنحراف المعياري " والذي سيكون تمييزه هو نفس الوحدات. ففي هذا المثال يكون الانحراف المعياري للدخول هو :

دولاراً $\sqrt{6}=2.449$

والانحراف المعياري – عادة – يستخدم بدلاً من التباين كأهم مقياس للتشتت. فالتباين ما هو إلا مربع الانحراف المعياري، والانحراف المعياري ما هو إلا الجذر التربيعي الموجب للتباين.

تعريف الانحراف المعياري : الانحراف المعياري هو. الجذر التربيعي الموجب للوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم عن وسطها السحابي. أي هو الجذر التربيعي الموجب للتباين. وعادة يرمز للانحراف المعياري للعينة بالرمز S ولتباين العينة بالرمز S^2 وللانحراف المعياري للمجتمع بالرمز اللاتيني σ (سيجما) ولتباين المجتمع بالرمز σ^2.

ويمكن التعبير عن كل من التابين والانحراف المعياري بالرموز كما يلي :

إذا فرضنا أن قيم العينة هي :

$X_1 , X_2 , \dots , X_n$ (أي عددها n) فإن الخطوات تكون كما يلي :

١ – حساب الوسط الحسابي أي حساب $\overline{X}$ حيث :

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

٢ – حساب إنحرافات القيم عن الوسط الحسابي، أي :

$$X_1 - \overline{X}, X_2 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}$$

٣ – تربيع هذه الانحرافات، أي :

$$(X_1 - \overline{X})^2, (X_2 - \overline{X})^2, \ldots, (X_n - \overline{X})^2$$

٤ – التباين هو الوسط الحسابي لهذه المربعات، أي :

$$S^2 = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + , (X_2 - \overline{X})^2 , + \ldots + , (X_n - \overline{X})^2}{n}$$

والتي يمكن كتابته (بإختصار البسط) كما يلي :

تباين العينة

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_I - \overline{X})^2}{n}$$

٥ – الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، أي :

الانحراف المعياري للعينة

$$S = \sqrt{\frac{\sum (X_I - \overline{X})^2}{n}}$$

وبالطريقة نفسها إذا كانت لدينا قيم المجتمع الإحصائي. فإذا كانت قيم المجتمع هي : $X_1 , X_2 , \ldots , X_N$ أي عددها N فإن قانوني التباين والانحراف المعياري للمجتمع – بافتراض أن الوسط الحسابي للمجتمع هو μ (ميو) – يمكن كتابتها كما يلي:

تباين المجتمع

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{N}$$

الانحراف المعياري للمجتمع

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{N}}$$

ملاحظة مهمة :

يمكن حساب كل من التباين والانحراف المعياري بطريقة مختصرة – وتعطي النتائج نفسها بطبيعة الحال – كما يلي :

* تباين العينة بالطريقة المختصرة :

$$S^2 = \frac{\sum x^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2$$

* الانحراف المعياري للعينة بالطريقة المختصرة :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2}$$

وفي الطريقة المختصرة فإن كل المطلوب معرفته لحساب التباين أو الإنحراف المعياري هو $\sum x$ (أي مجموع القيم)، $\sum x^2$ (أي مجموع مربعات القيم) ثم التعويض في القانون.

مثال (٤) :

أحسب التباين والإنحراف المعياري بالطريقة المختصرة لبيانات المثال رقم (٣).

الحل :

يمكن تنظيم الحل في الجدول التالي :

X	X^2
70	4900
75	5625
71	5041
75	5625
74	5476
76	5776
73	5329
78	6084
$\sum x = 592$	$\sum x^2 = 43856$

ويكون التباين (حيث $n = 8$) هو :

$$S^2 = \frac{\sum x^2}{n} = (\frac{\sum x}{n})^2$$
$$= \frac{43856}{8} = \left(\frac{592}{8}\right)^2$$
$$= 5482 - 5476$$
$$S^2 = 6$$

وبالتالي فإن الإنحراف المعياري هو : $S = \sqrt{6} = 2.449$ وهي النتائج نفسها التي حصلنا عليها سابقاً ولكن بطريقة أبسط.

بعض خصائص الإنحراف المعياري :

١ – قيمة الانحراف المعياري دائماً موجبة أو أكبر من أو تساوي صفر. فأقل قيمة تساوي الصفر (وذلك عندما تكون جميع القيم متساوية، وفي هذه الحالة لا توجد فروق أو إنحرافات بينها وبين الوسط الحسابي وبالتالي لا يوجد أي تشتت بين القيم، وبالتالي فإن قيمة الإنحراف المعياري في حالة تساوي جميع القيم تساوي الصفر).

٢ – كلما كان التشتت كبيراً حول الوسط كلما كان الانحراف المعياري كبيراً، والعكس صحيح.

٣ – إذا أضفنا وطرحنا مقداراً ثابتاً من كل القيم فإن قيمة الانحراف المعياري (أو التباين) لا تتغير (أي لا تتأثر قيمة الانحراف المعياري بالطرح أو الجمع). ولتوضيح هذه الخاصية نأخذ المثال التالي :

مثال (٥) :

حل المثال السابق رقم ٤ بعد طرح 70 (على سبيل المثال من كل القيم لاحظ أن هذا سوف يسهل الحسابات).

الحل :

القيمة بعد طرح (70)	المربعات (بعد الطرح)
X	X2
0	0
5	25
1	1
5	25
4	16
6	36
3	9
8	64
$\Sigma X = 176$	$\Sigma X^2 = 176$

ويكون التباين

$$S^2 = \frac{\Sigma X^2}{n} - \left(\frac{\Sigma X}{n}\right)^2$$

$$= \frac{176}{8} - \left(\frac{32}{8}\right)^2$$

$$= 22\text{-}16$$

$$= 6$$

والانحراف المعياري $S = \sqrt{6} = 2.449$ وهي النتائج نفسها مع ملاحظة أن العمليات الحسابية أسهل في هذه الحالة. وتجدر الإشارة إلى أنه لو طرحنا أي قيمة أخرى سنحصل على النتائج نفسها.

٤- إذا ضربنا كل قيمة في مقدار ثابت ثم حسبنا الانحراف المعياري للقيم الجديدة فإنه يجب القسمة على هذا المقدار الثابت. وإذا قسمنا كل قيمة على مقدار ثابت ثم حسبنا الانحراف المعياري للقيم الجديدة فإنه يجب الضرب في هذا المقدار الثابت.

٥,٥ معامل الاختلاف : The Coefficien of Variation

لمقارنة تشتت مجموعتين (أو أكثر) من البيانات وكانت البيانات تختلف في مستواها العام (أي في أوساطها الحسابية) و / أو تختلف في وحدات القياس (مثلاً مقارنة بيانات الدخل حيث تقاس بالريال ببيانات العمر حيث تقاس بالسنوات) فإن المقارنة لا تتم مباشرة بمقارنة الانحراف المعياري لكل منهما بل تتم من خلال مقياس آخر هو "معامل الاختلاف" أو ما يسمى أحياناً مقياس التشتت النسبي حيث ينسب الانحراف المعياري لكل مجموعة إلى وسطها الحسابي والضرب في 100 فنحصل على مقياس نسبي أو مئوي (وبدون تمييز) أي تتم المقارنة بحساب معامل الاختلاف لكل منهما، والمجموعة التي لها معامل اختلاف أكبر تكون أكبر تشتتاً والعكس صحيح أي أن :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100$$

وإذا رمزنا لمعامل الاختلاف بالرمز C. V فإن :

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100$$

مثال (٦) إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدخول عينة من الناخبين بالريالات هو : $\bar{X}_1 = 1500, S_1 = 152$

وكان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأعمارهم (بالسنوات) هو :

$\bar{X}_2 = 42, S_2 = 9.2$

فأيهما أكثر تشتتاً الدخل أم العمر ؟

الحل :

لمقارنة التشتت نحسب معامل الاختلاف لكل من الدخل والعمر كما يلي :

١- معامل اختلاف الدخل : $c.v_1 = \frac{s_1}{\bar{x}_1} \times 100 = \frac{152}{1500} \times 100 = 10.13\%$

٢- معامل اختلاف العمر : $c.v_2 = \frac{s_2}{\bar{x}_2} \times 100 = \frac{9.2}{42} \times 100 = 21.9\%$

٣- بما أن معامل اختلاف العمر أكبر من معامل اختلاف الدخل فإن بيانات العمر تكون أكثر تشتتا من بيانات الدخل.

حساب التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة :

إذا كانت البيانات مبوبة على شكل قيم وتكرارات، فإن التباين والانحراف المعياري بالطريقة المختصرة يمكن حسابهما كما يلي :

التباين في حالة البيانات المبوبة : $$S^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2$$

الانحراف المعياري للبيانات المبوبة $$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2}$$

حيث X تمثل القيم، f تمثل التكرارات. وإذا كانت البيانات على شكل فئات تحسب مراكز هذه الفئات ويرمز لها بالرمز X، ويتم حساب $\sum Xf$ ، $\sum X^2 f$

مثال (٧) : الجدول التالي يمثل توزيع مجموعة من الناخبين حسب أعمارهم وفي وقت معين، والمطلوب حساب الانحراف المعياري لأعمار الناخبين ؟

الأعمار X	عدد الناخبين f
20	3
25	4
30	5
35	2
المجموع	14

الحل :

ينظم الحل كما في الجدول التالي حيث يتم حساب كل من Xf، X^2f للحصول على ΣXf ، $\Sigma X^2 f$

الأعمار X	أعداد الناخبين f	حاصل ضرب Xf	حاصل ضرب X^2f
20	3	60	1200
25	4	100	2500
30	5	150	4500
35	2	70	2450
المجموع	$\Sigma f = 14$	$\Sigma xf = 380$	$\Sigma x^2f = 10650$

ويحسب الانحراف المعياري باستخدام الصيغة التالية :

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma xf}{\Sigma f}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{10650}{14} - \left(\frac{380}{14}\right)^2}$$

$$= \sqrt{760.7 - 736.6}$$

$$= \sqrt{24.1} = 4.9$$

أي أن الانحراف المعياري لأعمار الناخبين يساوي ٤,٩ سنة.

مثال (٨) شامل على التشتت :

البيانات في الجدول الخاص بالمثال الشامل رقم (٦) على المتوسطات التي تمثل أهم الحروب التي شهدها العالم خلال الفترة من عام 1945، وحتى عام 1980م. احسب المدى، الانحراف المعياري، ومعامل الاختلاف لعدد الحروب خلال الفترة ؟

الحل :

يمكن تلخيص بيانات الجدول رقم (١) في الجدول التالي :

الحروب X	التكرارات f
0	4
1	8
2	7
3	9
4	6
6	2
المجموع	36

والجدول يوضح أن هناك أربع سنوات لم تحدث فيها حروب، وثمان سنوات حدثت في كل منها حرب واحدة، وسبع سنوات حدثت في كل منها حربان، وهكذا....

أولاً: المدى

المدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة. وأكبر قيمة هنا تساوي 6 حروب وأصغر قيمة تساوي صفر (لا توجد حروب)، وبالتالي فالمدى هو :

(6 = 0 – 6) أي أن المدى يساوي 6 حروب.

ثانياً: الانحراف المعياري :

يمكن تلخيص الحسابات كما في الجدول التالي :

الحروب X	التكرارات f	حاصل ضرب X. f	حاصل ضرب X^2f
0	4	0	0
1	8	8	8
2	7	14	28
3	9	27	81
4	6	24	96
6	2	12	72
المجموع	Σf =36	Σxf = 85	Σx^2f = 285

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma xf}{\Sigma f}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{285}{36} - \left(\frac{85}{36}\right)^2}$$

$$= \sqrt{7.917 - 5.569}$$

$$= \sqrt{2.348} = 1.53$$

أي أن الانحراف المعياري لعدد الحروب خلال تلك الفترة يساوي 1.53 حرباً

(لاحظ أن التباين يساوي 2.348 فهو القيمة قبل استخراج الجذر)

ثالثاً: معامل الاختلاف :

معامل الاختلاف يساوي خارج قسمة الانحراف المعياري على الوسط الحسابي مضروباً في (100) أي أن :

$$CV = \frac{S}{\overline{X}} \times 100$$

١- الوسط الحسابي (كما حسبناه سابقا) :

$$\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{85}{36} = 2.36$$

٢- الانحراف المعياري (كما حسبناه أيضا) $S = 1.53$

٣- معامل الاختلاف هو:

$$CV = \frac{1.53}{2.36} \times 100$$
$$= 64.8\ \%$$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرات الأسبوعية لمادة:

" الرياضيات التطبيقية "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

قسم تقنيات الموارد المائية – فرع تقنيات الري و البزل	النظام السنوي ٣٠ أسبوع	**عدد الساعات الأسبوعية**	ن	ع	م
			٢	-	٢
مفردات مادة الرياضيات	السنة الدراسية الأولى	Mathematics			

الهدف من المادة:

تطوير امكانية الطلبة في استعمال الرياضيات في التطبيقات العملية و الاستفادة منها في الدروس التقنية الأخرى، و تعليم الطالب تمثيل المعادلات و القوانين الرياضية في مجال الحاسوب.

المفردات النظرية

الأسبوع	تفاصيل المفردات
١ - ٢	النسب و العلاقات المثلثية – المتطابقات – حل المعادلات المثلثية.
٣ - ٤	الأسس و اللوغاريتمات و قوانينهما – حل المعادلات الأسية و اللوغارتمية.
٥ - ٦	المحددات أو المصفوفات – مفكوك المحدد – خواص المحدد – حل المعادلات الخطية باستعمال المحددات أو (قانون كرامر).
٧ - ٨	المتجهات – تعريف الكميات الاتجاهية و غير الاتجاهية – ايجاد مقدار المتجه – جمع و طرح المتجهات – ضرب المتجهات – ايجاد الزاوية بين متجهين.
٩ - ١٩	التفاضل – تعريف الدالة أو المشتقة و انواع الدوال – ايجاد المشتقة الأولى للدوال الجبرية بطريقة الغاية أو الطريقة المطولة - ايجاد المشتقة الأولى للدوال الجبرية بالطريقة المختصرة – مشتقة الدوال الضمنية – قاعدة السلسلة في ايجاد مشتقة دالة الدالة – ايجاد المشتقات ذات المراتب العليا – تطبيقات التفاضل (رسم الدوال و بعض المسائل العملية).
٢٠ - ٢٥	التكامل – التكامل المحدود و غير المحدود – التكامل المحدود تطبيقاته – المساحة تحت المنحني و المساحة بين منحنيين – استعمال طريقة شبه المنحرف و طريقة سمبسون في التكامل – الطرق العددية في التكامل.
٢٦ - ٢٨	الإحصاء – التوزيعات التكرارية – ايجاد المعدل و الوسط الحسابي و الوسيط و المنوال و التباين و الإنحراف المعياري.

٢٩ - ٣٠	تطبيقات على الحاسوب في موضوع التفاضل و موضوع التكامل و الإحصاء.

المصادر العامة

١. "حساب التفاضل و التكامل" – توماس.
٢. "رسم المخططات البيانية الهندسية" – مكرم انور الشيخ.
٣. "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.
٤. "برنامج Math lab" في الحاسبة.
٥. "برنامج Math cad" في الحاسبة.

احتساب درجات الأمتحانات

درس **"الرياضيات التطبيقية"** من الدروس ذات الطابع النظري فقط	**الفصل الأول**			**الفصل الثاني**			**أعمال السنة**	**السعي السنوي**	**الدور الأول أو الثاني**			**المجموع الكلي**
	ن	ع	مج	ن	ع	مج			ن	ع	مج	
	٢٠	-	**٢٠**	١٥	-	**١٥**	٥	**٤٠**	٦٠	-	٦٠	١٠٠

ملاحظة:

أعمال السنة تشمل نشاط الطالب خلال العام الدراسي، من خلال مشاركته في المحاضرة و درجات الأمتحانات اليومية و الفجائية و نسبة غياباته.

١ـ النظرة الشاملة:

أ- الفئة المستهدفة:-

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

يعد درس الرياضيات التطبيقية ركناً أساسياً في دراسة الطلبة وفي تحصيلهم العلمي، و ذلك عبر تطوير امكانياتهم في استعمال الرياضيات في التطبيقات العملية و الاستفادة منها في الدروس التقنية الأخرى.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: تعليم الطالب تمثيل المعادلات و القوانين الرياضية.

ثانياً: أتقان استعمال القوانين الرياضية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على أن:

١. يتعرف على منهاج درس الرياضيات التطبيقية.
٢. كيفية التفاعل و التواصل مع الدرس و مع الأستاذ المحاضر.

٢- الاختبار القبلي:

ضع دائرة حول الحرف الذي يسبق الأجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١- مقياس الرسم هو:
أ- البعد على الأرض بالمتر.
ب- البعد على الخارطة مقسومًا على ما يمثله على الأرض.
جـ- البعد على الخارطة فقط.
د- لا يوجد جواب صحيح و الصحيح هو:

٢- النسب المثلثية مثل الجيب و الجيب تمام لا تصح إلا بالمثلث:
أ- المتساوي الأضلاع.
ب- المتساوي الساقين.
جـ- القائم الزاوية.
د- لا يوجد جواب صحيح و الصحيح هو:

٣- الأس التربيعي لمقدار معين يعني:
أ- المقدار مضروب في نفسه أربع مرات.
ب المقدار مضروب في نفسه مرتين.
جـ- المقدار مضروب في أربعة.
ذ- لا يوجد جواب صحيح و الصحيح هو:

٤- اللوغاريتم هو:
أ- لوغاريتم أي مقدار هو الأس الذي لو رفع إليه أساس اللوغاريتم لنتج المقدار نفسه.
ب- لوغاريتم أي مقدار هو أساس اللوغاريتم مرفوع للأس ١٠.
جـ- لوغاريتم أي مقدار هو ١٠ مرفوعة لأساس اللوغاريتم.
د- لا يوجد جواب صحيح و الصحيح هو:

٥- وحدة قياس المسافات بنظام القياس الفرنسي هي:
أ- القدم.
ب- الأنج.
جـ- المتر.
د- لا يوجد جواب صحيح و الصحيح هو.

٦- الدونم هو وحدة قياس مساحة الأراضي الزراعية و يعادل:
أ- ١٥٠٠ م^{٢}.
ب٢٥٠٠ م^{٢}.
جـ- ٣٥٠٠ م^{٢}.
د- لا يوجد جواب صحيح و الصحيح هو:

٧- السرعة و القوة من:
أ- الكميات الاتجاهية.
ب- الكميات غير الاتجاهية.
جـ- الكميات الاتجاهية وغير الاتجاهية.
د- لا يوجد جواب صحيح و الصحيح هو:

٨- الأحداثيات لأية نقطة هي المسافات المتعامدة مع:
أ- المحور السيني.
ب- المحور الصادي.
جـ- المحورين.
د-لا يوجد جواب صحيح و الصحيح هو:

٩- قاعدة السلسلة تستعمل لايجاد:
أ- تفاضل الدالة المثلثية.
ب- المشتقات من درجات عالية كالمشتقة الثانية.
جـ- تفاضل دالة الدالة.
د- لا يوجد جواب صحيح و الصحيح هو:

١٠- يستعمل ثابت التكامل مع:
أ- التكامل المحدود.
ب- التكامل غير المحدود.
جـ- في التكامل المحدود و غير المحدود.
د- لا يوجد جواب صحيح و الصحيح هو:

ملاحظة:

١. لكل سؤال درجة واحدة.
٢. يرجى التحقق من سلامة أجابة الطلبة بمراجعة صفحة (مفتاح الأجابات على الاختبار القبلي) في نهاية المحاضرة، و ذلك للوقوف على مستوى الطلبة.

٣- مفتاح الأجابات على الاختبار القبلي:

الاختبار القبلي	
رقم السؤال	الاجابة الصحيحة
١	ب
٢	جـ
٣	ب
٤	أ
٥	جـ
٦	ب
٧	أ
٨	جـ
٩	جـ
١٠	ب

المصادر:

١. "حساب التفاضل و التكامل" – توماس.

٢. "رسم المخططات البيانية الهندسية" – مكرم انور الشيخ.

٣. "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الأسبوعية الأولى لمادة الرياضيات التطبيقية:

" وحدات القياس بالنظام المتري "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس
أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ **٢٠١٠ م**

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على وحدات القياس بالنظام المتري.

ثانياً: أتقان فهم و حفظ وحدات القياس بالنظام المتري.

ثالثاً: أستعمال وحدات القياس بالنظام المتري في التطبيقات المختلفة.

ث- أهداف الوحدة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على أن:

١. يوجد وحدات القياس بالنظام المتري.

٢. يحول الوحدات حسب الخاصية المعطاة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف بعض وحدات القياس بالنظام المتري و التي قد سبق للطالب أن أخذها في المراحل السابقة.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" وحدات القياس بالنظام المتري "

النظام الدولي للوحدات:

يرمز له بـ (SI) (الأحرف الأولى للمصطلح الفرنسي Système International d'Unités) هو نظام وحدات القياس الأوسع انتشارا في العالم، وهو يستخدم في كل بلدان العالم باستثناء الولايات الأمريكية المتحدة، واشتق هذا النظام من نظام متر – كيلوغرام – ثانية للقياس بإضافة بعض الوحدات، وكونه بديلا عن نظام السنتمتر –غرام– ثانية القديم.

تم استحداث هذا النظام على أيدي مجموعة من العلماء الفرنسيين في العقد الأخير من القرن الثامن عشر الميلادي، وتمت مراجعته عدة مرات وهو يُسمى في هيئته الحالية رسمياً باسم النظام العالمي للوحدات، أما التسمية متري فأصلها هو وحدة قياس الطول الأساسية "المتر" و ترجع سهولة استخدام النظام المتري إلى سببين؛ فهو أولاً يتبع النظام العشري . أي أن الوحدات المترية تتزايد وتتناقص في المقدار بالعشرات و كذلك فإن جميع القياسات في النظام المتري مبنية على سبع وحدات أساسية، بينما يحتاج النظام البريطاني لأكثر من عشرين وحدة، وذلك لمجرد إجراء القياسات المألوفة.

تطور وحدات القياس:

أستعمل المصريون الذراع (٠,٥٢٥ متر) وأجزاءه القدم والكف والإصبع، أما الكلدانيون والأشوريون فاستخدموا الشبر (٠,٢٧٠ متر) وأجزاءه الكف والإصبع، وأوجدوا الفرسخ (٥٨٢٠ مترا) كما ورد في الإنجيل ذكر الذراع المقدس (٠,٦٣٥٦٦ متر).

أما حديثا: فإن علم القياس (الميترولوجيا) يضع - باستمرار- بين أيدي المختصين أجهزة أدق من سابقاتها، لمواكبة ركب التقدم العلمي، وهو يعتمد قبل كل شيء على اختيار مناسب لوحدة القياس التي يراد منها أن تكون أساسية وعالمية (ولنقل كونية)، لذلك يشترط أن تكون وحدة القياس التي يحتاجها الإنسان - عالما كان أم لا - سهلة الاستخدام، مضاعفاتها أو أجزاؤها بسيطة الاستنتاج والحساب ومجسدة، فوق كل ذلك، بدقة.

كانت وحدات القياس - المستخدمة سابقا - تحتوي على العديد من السلبيات: اختلاف اسم الوحدة بين إقليم وآخر، نقص في الدقة في بعض الوحدات، غياب العلاقات البسيطة بين مختلف الوحدات، وبين هذه الوحدات وأجزائها، ناهيك عن التعقيدات المتعلقة بها.

في أيام الثورة الفرنسية قامت أكاديمية العلوم في فرنسا عام (١٧٩٠) بالبحث عن نظام بسيط موحد للمقاييس ليضع حدا لكل هذه الصعوبات، فعينت الأكاديمية لجنتين من العلماء للدراسة والتنفيذ و قررت هاتان اللجنتان أن نظام القياس سيكون عشريا وأن الوحدة البدئية سيبحث عنها وتنتقى من الطبيعة كي يمكن إعادة صنعها واستعمالها إن زالت لسبب ما حيث تقرر أن تكون هذه الوحدة "وحدة طول" وأن طولها يجب أن يكون مساويا لعشر مليون ربع طول خط الطول - وهو الخط الواصل بين قطبي الكرة الأرضية - أي أنها تساوي (١/ ٤٠٠٠٠٠٠٠) وسميت هذه الوحدة بالميتر لتحل محل "التواز" (الوحدة التي كانت مستعملة من قبل).

بعد ذلك قام العالمان دولامبر وميشان بقياس القوس من خط الطول الواصل بين مدينتي دنكرك بفرنسا وبرشلونة بإسبانيا بواسطة ما يسمى ب"تثليث هندسي" وهي مجموعة من العمليات تقوم على قياس مجموعة من المثلثات ثم تبدأ بحلها الواحدة تلو الأخرى، وهي عمليات تعتمد على علم دراسة شكل ومقياس الأرض وتمثيلها في المستوى وهو العلم المسمى بـ الجيوديسيا أو المساحة. بمقارنة النتائج التي توصلا إليها بالنتائج التي حصل عليها في البيرو، وفي السويد وجد أن ربع طول خط الطول (هذا) والمار في مدينة باريس يساوي ٥١٣٠٧٤٠ "تواز" أي أن طول الميتر أصبح معروفا ويساوي (٠,٥١٣٠٧٤٠ تواز).

تأسس النظام المتري عام ١٧٩٥ وأعطيت بذلك القيمة القانونية للنموذج المعياري المصنوع من البلاتين الخالص ومن ثم أودع خزائن الأرشيف الوطني في باريس، يعطي هذا النموذج طول المتر من البلاتين عند درجة الحرارة صفر مئوية وهو النموذج الذي يستخدمه ويرجع إليه صانعو آلات القياس والمختصون لتدقيق الآلات والأجهزة التي نستخدمها، وعندما اجتمع المؤتمر الأول للأوزان والقياسات بمشاركة عشرين دولة في باريس عام ١٨٧٥ اعتمد النظام المتري كنظام عالمي (احتفظت بعض الدول كبريطانيا بأنظمة قياس خاصة بها)، وصنع النموذج العالمي للمتر من خليطة من البلاتين والإريديوم وأودع خزائن المكتب العالمي للأوزان والمقاييس في فرنسا و لكن لم تعد دقة هذا النموذج كافية بعدما حدث من تقدم علمي، فبينما كان - في نهاية القرن الثامن عشر - الجزء من فئة من الميليمتر صعب المنال، أصبحنا في بداية القرن العشرين نميز الجزء من فئة من الميكرون.

استطاع هذا النموذج أن يفي بأغراض علم القياس بخطأ يقدر ببضعة أعشار الميكرون، حتى عام ١٩٦٠، حيث إنه مع التقدم العلمي المطرد والحاجة إلى دقة تفوق الحدود التي يقدمها النموذج الميكانيكي للمتر، ومن أجل تعريف كوني له، قرر المؤتمر الحادي عشر للأوزان و القياسات إعطاء المتر تعريفا يعتمد على الخصائص الذرية للعناصر فجاء التعريف على النحو التالي: طول المتر يساوي ٧٣,١٦٥٠٧٦٣ مرة طول موجة الإشعاع المنطلقة من نواة ذرة نظير الكريبتون ٨٦ للانتقال بين المستويين (d55 & p102).

إن هذا التقدم الذي طرأ على تعريف المتر ضروري، ولم يكن هناك بد منه إذ لولاه لما رأينا الكثير من الاختراعات والاكتشافات التي قام بها العلماء في الفيزياء، أو الفلك أو حتى في علم الأحياء.

هناك ٧ وحدات أساسية في النظام الدولي للوحدات هي:

المتر: و يقاس بواسطته الطول و يرمز له بالـ "م".
الكيلوغرام: و تقاس بواسطته الكتلة و يرمز له بالـ "كغم".
الثانية: و يقاس بها الزمن و يرمز لها بال "ث" وتحدد بمدة إشعاع ذرة السيزيوم.
الأمبير: و يقاس به شدة التيار الكهربائي و يحدد بالقوة الكهروديناميكية بين موصلين.
الكلفن: و تقاس به درجة الحرارة و يرمز له بـ "ك".
الشمعة: و تقيس شدة الضوء و ليس لها اختصار (في الإنجليزية "cd") وهي مقدار الإشعاع الناتج من ذرة البلاتين PT المتجمدة.
المول: وحدة لقياس كمية المادة ويستعمل عادة في الكيمياء، و المول هو عدد أفوكادرو (تقريبا ٦,٠٢٢١٤١٥ × ١٠^{٢٣}) من الجزيئات الأساسية، سواء كان الحديث يدور عن ذرات أو جزيئات لمركب ما.

- إن للثلاث وحدات الأولى أهمية خاصة و كما يأتي:

١) وحدات الطول: و هي المتر (م) و أجزاؤه (سم، ملم،...) و مضاعفاته (كم،...). حيث أن:
١ م = ١٠٠ سم.
١ م = ١٠٠٠ ملم.
١ كم = ١٠٠٠ م.
و يشتق من وحدات الطول وحدات المساحة (م^{٢} و الدونم و الهكتار و الفدان،...) و وحدات الحجم (م^{٣}، و اللتر و الملليتر و السنتمتر مكعب،....).

٢) وحدات الكتلة: و هي الكيلوغرام (كغم) و أجزاؤه (غم،...) و مضاعفاته (طن،...). حيث أن:
١ كغم = ١٠٠٠ غم.
١ طن = ١٠٠٠ كغم.
و يشتق من وحدات الكتلة وحدات الوزن (النيوتن و الداين) و أخرى مثل (الجول و الواط).

٣) وحدات الزمن: و هي الثانية (ثا) و مضاعفاتها (دقيقة، ساعة،...).
١ دقيقة = ٦٠ ثا.
١ ساعة = ٦٠ دقيقة.

أجزاء و مضاعفات الوحدات :

المضاعفات			الأجزاء		
اسـم المعامل	الرمز	معامل الضرب	اسـم المعامل	الرمز	معامل الضرب
التيرا Tera	T	10^{12}	السنتي - centi	c	10^{-2}
الگيگا Giga	G	10^{9}	الميللي - milli	m	10^{-3}
الميگاMega	M	10^{6}	المايكرو - micro	µ	10^{-6}
الكيلو kilo	k	10^{3}	النانو - nano	n	10^{-9}
			البيكو - pico	p	10^{-12}

جدول (١) وحدات القياس الأساسية:

الكمية	الوحدة بالنظام الدولي (ISU)
الكتلة (Mass)	كغم (Kg)
الطول أو المسافة (Length)	م (M)
الزمن (Time)	ثا (S)

جدول (٢) وحدات القياس المشتقة

الكمية	الوحدة بالنظام الدولي (ISU)
الكثافة الكتلية = الكتلة/الحجم	Kg/m^3
الكثافة الوزن = الوزن/الحجم	N/m^3
القوة	نيوتن (N)
الضغط = قوة/مساحة	N/m^2 (باسكال)

جدول (٣) حساب أبعاد بعض الكميات الفيزيائية.

الكمية الفيزيائية	بُعد الكمية الفيزيائية
الكثافة (ρ) = الكتلة / الحجم	$[\rho]=\frac{M}{L^3}=ML^{-3}$
السرعة الخطية (v) = المسافة / الزمن	$[v]=\frac{L}{T}=LT^{-1}$
السرعة الزاوية (ω) = السرعة الخطية / نصف قطر الدوران	$[\omega]=\frac{LT^{-1}}{L}=T^{-1}$
التعجيل (a) = السرعة الخطية / الزمن =$(a$	$[a]=\frac{LT^{-1}}{T}=LT^{-2}$
القوة (F) = الكتلة x التعجيل	$[F]=M\times LT^{-2}=MLT^{-2}$
الشغل (W) = القوة x الإزاحة	$[W]=MLT^{-2}\times L=ML^2T^{-2}$
القدرة (P) = الشغل / الزمن	$[P]=\frac{ML^2T^{-2}}{T}=ML^2T^{-3}$

مقياس ريختر (للمعلومات):

مقياس ريشتر (Richter scale) هو مقياس عددي يستخدم لوصف قوة الزلازل. اخترعه تشارليز ريشتر في عام ١٩٣٥م. الزلازل التي قياسها ٤,٥ أو أكثر على المقياس يمكن أن تقاس بالأدوات في جميع أنحاء العالم.

الوصف	قياس ريختر	ما يفعله الزلزال	حدوث الزلزال
دقيق	أقل من ٢,٠	زلازل دقيقة لا يمكن أن يحس بها.	حوالي ٨٠٠٠ كل يوم
صغير جداً	2.0 إلى ٢,٩	لا يشعر به البشر ولكن الأجهزة ترصده.	حوالي ١٠٠٠ كل يوم
صغير	3.0 إلى ٣,٩	يشعر به البشر، لكن قلما يسبب ضرراً.	حوالي ٤٩٠٠٠ كل عام
خفيف	4.0 إلى ٤,٩	يشعر البشر بهزة مع تحرك الأشياء وظهور صوت للزلزال. لكنه لا يسبب ضرراً.	حوالي ٦٢٠٠ كل عام
معتدل	5.0 إلى ٥,٩	المباني الضعيفة قد تتضرر بشكل كبير ولكن المباني القوية لا تتضرر كثيراً.	حوالي ٨٠٠ كل عام
قوي	6.0 إلى ٦,٩	يمكن أن يسبب ضرراً كبيراً حتى ١٠٠ ميل عن نقطة حدوثه.	حوالي ١٢٠ كل عام
كبير	7.0 إلى ٧,٩	يمكن أن يسبب أضراراً كبيرة على مساحة كبيرة.	حوالي ١٨ كل عام
عظيم	8.0 إلى ٨,٩	يمكن أن يسبب أضراراً كبيرة حتى مئات الأميال عن نقطة حدوثه.	حوالي مرة كل عام
نادرا	9.0 إلى ٩,٩	يمكن أن يسبب أضراراً كبيرة حتى آلاف الأميال عن نقطة حدوثه.	حوالي مرة كل ٢٠ عام
خارق	10.0 وأكثر	لم يحدث إلى الآن.	غير معروف

أسئلة عامة

س١/ عرّف كلا مما يأتي ثم جد ما يعادله في نظام الوحدات المتري:
الفرسخ، الميل، الدونم، الهكتار، الفدان، الطغار، القيراط، الأونصة، الرطل، اللتر، الغالون، البرميل، الباسكال.
س٢/ حوّل ما يأتي:

- ٣ كم و ٢٥ م إلى سم.
- 3.2 م^3 إلى لتر.
- 8.64 م/يوم إلى سم/ثا.
- 432 لتر/يوم إلى م^3/ثا.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة السابعة عشر لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص و ما دار سابقًا.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التفاضل "

مثال: جد المشتقة الأولى للدوال العكسية الآتية بأبسط صورة:

$$y = \sin^{-1}(x^2+1)$$

الحل:

Put $u = x^2+1$

$$\therefore y = \sin^{-1} u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}.2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4-2x^2-1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2(-x^2-2)}} = \frac{2x}{x\sqrt{-x^2-2}} = \frac{2}{\sqrt{-x^2-2}}$$

$$y = \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

الحل:

Put $u = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$\therefore y = \cot^{-1} u$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}} = \frac{1}{x^2+1}$$

واجب بيتي

جد مشتقة الدوال الآتية بأبسط صورة:

$y = \sec^{-1}(\sin x)$ * $y = \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ * $y = \cos^{-1}(3x^2+1)$ * $\tan y = \frac{1}{x^2}$ *

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

جد مشتقة الدوال الآتية بأبسط صورة:

س١/: $y = \cos^{-1}(3x^2+1)$ س٢/: $y = \sec^{-1}(\sin x)$.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الأسبوعية الأولى لمادة الرياضيات التطبيقية:

" النسب و العلاقات المثلثية "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

بـ مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

تـ الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على النسب و العلاقات المثلثية.

ثانياً: أتقان فهم و حفظ العلاقات المثلثية.

ثالثاً: أستعمال النسب و العلاقات المثلثية في التطبيقات المختلفة.

ثـ أهداف الوحدة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على أن:

١. حل المعادلات المثلثية.

٢. الاستفادة من النسب المثلثية.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف بعض النسب و العلاقات المثلثية و التي قد سبق للطالب أن أخذها في المراحل السابقة.

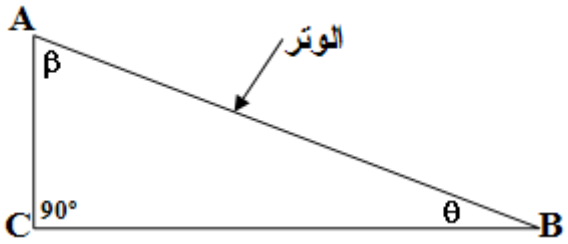
ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" النسب و العلاقات المثلثية "

المثلث مضلع له ثلاثة أضلاع و مجموع زواياه (180^o) و هو بأشكال عدة و ما يهمنا هنا في هذا الموضوع هو "المثلث قائم الزاوية" إذ لا تصح النسب المثلثية إلا فيه.



النسب المثلثية:

١. الجيب (Sine) و المختصر "sin": وهو طول الضلع المقابل للزاوية مقسوماً على طول ضلع الوتر، أي أن:

$$\sin\theta = \frac{AC}{AB}$$

٢. الجيب تمام (Cosine) و المختصر "cos" وهو طول الضلع المجاور للزاوية مقسوماً على طول ضلع الوتر، أي أن:

$$\cos\theta = \frac{BC}{AB}$$

٣. الظل (Tangent) و المختصر "tan": وهو طول الضلع المقابل للزاوية مقسوماً على طول الضلع المجاور لها، أو الظل هو جيب الزاوية مقسوم على جيب تمامها، أو هو معكوس الظل تمام، أي أن:

$$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

٤. الظل تمام (Cotangent) و المختصر "cot": وهو طول الضلع المجاور للزاوية مقسوماً على طول الضلع المقابل لها، أو الظل تمام هو جيب تمام الزاوية مقسوم على جيبها، أو هو معكوس الظل، أي أن:

$$\cot\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

٥. القاطع (Secant) و المختصر "sec": وهو طول ضلع الوتر مقسوماً عى طول الضلع المجاور للزاوية، أو القاطع هو معكوس الجيب تمام، أي أن:

$$\sec\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

٦. القاطع تمام (Cosecant) و المختصر "csc": وهو طول ضلع الوتر مقسوماً على طول الضلع المقابل للزاوية، أو القاطع تمام هو معكوس الجيب، أي أن:

$$\csc\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

ملاحظة:

النسب المثلثية للزاوية β المتممة للزاوية θ في نفس المثلث أعلاه $(\theta + \beta = 90°)$ هي كالآتي:

$$\sin\beta = \cos\theta$$
$$\cos\beta = \sin\theta$$
$$\tan\beta = \cot\theta$$
$$\cot\beta = \tan\theta$$
$$\sec\beta = \csc\theta$$
$$\csc\beta = \sec\theta$$

نستنتج مما سبق أن " **النسبة المثلثية غير التمام لأي زاوية في مثلث قائم الزاوية هي نفس النسبة المثلثية التمام للزاوية المتممة لتلك الزاوية في نفس المثلث القائم الزاوية** ".

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

سيتم بعد نهاية الموضوع.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة التاسعة لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أ- الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التفاضل "

الدالة:

يرمز لها بالرمز $y = f(x)$، حيث y هي الثابت أو المتغير المعتَمِدْ و f هي الحرف الأول لكلمة function و التي تعني دالة باللغة الإنكليزية و x هو المتغير غير المعتَمِدْ، و يمكن أن يكون العكس أيضا صحيح أي أن $x = f(y)$. إن إحداثيات أية نقطة (x و y) بحيث أن هناك قيمة أو أكثر للإحداثي الثابت عند قيمة معينة للإحداثي المتغير، أي أن y تدعى بالدالة ويمكن بيانها أو تمثيلها بالآتي:

١. بالرسم كما سيرد ذكره لاحقا.
٢. بشكل معادلة مثل: $y = x^2 + 1$.
٣. بشكل جدول بيانات لقيم المتغيرين:

x	1	2	3	4	5
y	2	5	10	17	26

و عندما يراد إيجاد قيمة الدالة في أية نقطة يتم التعويض عن قيمة x في تلك الدالة.

مثال: جد قيمة الدالة $y = x^2 - 2$ عندما تكون $x = 3$ ؟

الحل:

$$y = f(x) = x^2 - 2$$

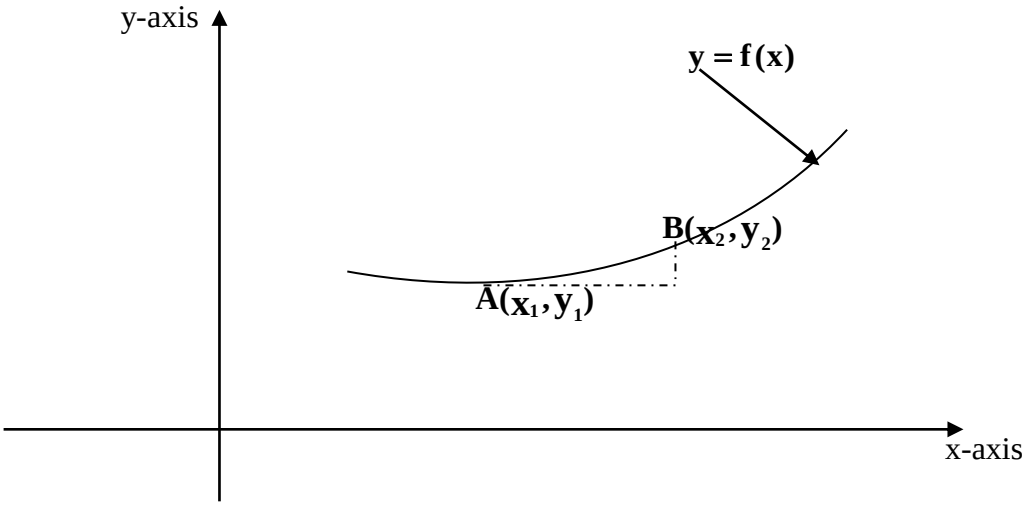
$$y = f(3) = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

- كل ما تقدم في أعلاه من دوال يدعى بـ **الدوال الجبرية**، و هناك أخرى ليست جبرية تدعى **الدوال المتسامية** تنتمي إليها (الدوال المثلثية مثل $y = \sin x$ و الدوال العكسية مثل $y = \sin^{-1} x$ و الدوال اللوغارتمية مثل $y = \ln x$ و الدوال الأسية مثل $y = e^x$).

المعادلات التفاضلية:

و هي المعادلات التي تحتوي على معدلات تغير، مثل معدل تغير المسافة التي يقطعها جسم متحرك بالنسبة للزمن كما في السرعة و التعجيل ($\mathbf{v = \frac{ds}{dt}}$ و $\mathbf{a = \frac{dv}{dt}}$)، و تستعمل كثيرًا في الحياة العملية.

إيجاد مشتقة الدالة بطريقة الغايات أو الطريقة المطولة:



لدينا الدالة $\mathbf{y = f(x)}$ الموضحة بالشكل في أعلاه و فيها:

$$\mathbf{m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\mathbf{y = f(x)}$$

$$\mathbf{\therefore y_1 = f(x_1); y_2 = f(x_2)}$$

$$\mathbf{\Delta x = x_2 - x_1}$$

$$\mathbf{\therefore x_2 = x_1 + \Delta x}$$

$$\mathbf{\therefore y_2 = f(x_1 + \Delta x)}$$

$$\mathbf{\therefore m_{AB} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}}$$

فإذا اقتربت B من A فإن ميل AB ($\mathbf{m_{AB}}$) سيصغر و يصغر إلى أن يصبح كمية ثابتة تدعى (ميل المماس للمنحني في B) أو المشتقة بحيث تكون قيمة $\mathbf{\Delta x}$ تقريبًا صفر ليصبح القانون بصيغته النهائية كالآتي:

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = x^2$ بالطريقة المطولة ؟

الحل:

$$y = f(x) = x^2; f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = 2x$$

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

سيتم لاحقًا.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة التاسعة عشر لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص و ما دار سابقًا.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التفاضل "

أسئلة عامة حول جميع الدوال

س١/ جد مشتقة الدوال الآتية بالطريقة المطولة:

$* \quad y = 2\sqrt{x} \quad * \quad y = (x^2 - 1) \quad * \quad y = x^3 \quad * \quad y = \frac{1}{x}$.

س٢/ جد مشتقة الدوال الجبرية الآتية بالطريقة المختصرة:

$* \quad y = 6x^3 + \frac{5}{x^2} + x - 9 \quad * \quad y = \frac{x^2+1}{x-3} \quad * \quad y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad * \quad y = x^2 . \sqrt{2x}$.

س٣/ جد مشتقة الدوال الضمنية الآتية:

$* \quad 3x^2 + x^2y^3 + 4y = 8 \quad * \quad x^2 + y^2 = 2 \quad * \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

س٤/ جد مشتقة الدوال الآتية باستخدام قاعدة السلسلة:

$* \quad y = t^2 + 1$ عندما $t = 3x + 4 \quad * \quad y = \sqrt{t} - 1$ عندما $t = x + 1$

س٥/ جد مشتقة الدوال المتسامية الآتية:

$* \quad y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x}} \quad * \quad y = \ln(\sin e^x) \quad * \quad y = x^2 . \sin(\ln x) \quad * \quad y = \sec(\sqrt{e^{2x} + 1})$

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

أثناء القاء المحاضرة و على السبورة.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة التاسعة و العشرون لمادة الرياضيات التطبيقية:

"الأحصاء "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على وصف البيانات لحالة معينة وتحليلها كمياً للوصول بالتالي إلى فهم أكثر وضوحاً لتلك الحالة.

ثانياً: أتقان و فهم البيانات التحليلية و إجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد بعض المؤشرات التي يمكن الاعتماد عليها في وصف الحالات المعينة.

٢. الاستفادة من تلك المؤشرات في التطبيقات العملية المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف الأحصاء و بعض المؤشرات التحليلية و الفائدة منه في مجال الأختصاص.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" الأحصاء "

الوسط الحسابي Arithmetic Mean

من أهم مقاييس النزعة المركزية ، وأكثرها استخداما في النواحي التطبيقية ، ويمكن حسابه للبيانات المبوبة وغير المبوبة ، كما يلي :

أولا: الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة

يعرف الوسط الحسابي بشكل عام على أنه مجموع القيم مقسوما على عددها . فإذا كان لدينا n من القيم ، ويرمز لها بالرمز : $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

فإن الوسط الحسابي لهذه القيم ، ونرمز له بالرمز $\bar{x}$ يحسب بالمعادلة التالية :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

حيث يدل الرمز Σ على المجموع .

مثال:

فيما يلي درجات 8 طلاب في مقرر ١٢٢ إحصاء تطبيقي .

34 32 42 37 35 40 36 40

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لدرجة الطالب في الامتحان .

الحل

لإيجاد الوسط الحسابي للدرجات تطبق المعادلة رقم (٣-١) كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$
$$= \frac{34+32+42+37+35+40+36+40}{8} = \frac{296}{8} = 37$$

أي أن الوسط الحسابي لدرجة الطالب في اختبار مقرر ١٢٢ إحص يساوي 37 درجة

ثانيا: الوسط الحسابي للبيانات المبوبة

من المعلوم أن القيم الأصلية ، لا يمكن معرفتها من جدول التوزيع التكراري ، حيث أن هذه القيم موضوعة في شكل فئات ، ولذا يتم التعبير عن كل قيمة من القيم التي تقع داخل حدود الفئة بمركز هذه الفئة ، ومن ثم يؤخذ في الاعتبار أن مركز الفئة هو القيمة التقديرية لكل مفردة تقع في هذه الفئة.

فإذا كانت k هي عدد الفئات ، وكانت $x_1, x_2, \ldots, x_k$ هي مراكز هذه الفئات، $f_1, f_2, \ldots, f_k$ هي التكرارات ، فإن الوسط الحسابي يحسب بالمعادلة التالية:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

مثـال:

الجدول التالي يعرض توزيع 40 تلميذ حسب أوزانهم .

فئات الوزن	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44
عدد التلاميذ	4	7	13	10	5	1

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي.

الحـل

لحساب الوسط الحسابي باستخدام المعادلة رقم (٣-٢) يتم إتباع الخطوات التالية :

١- إيجاد مجموع التكرارات $\sum f$. ٢- حساب مراكز الفئات x .

٣- ضرب مركز الفئة في التكرار المناظر له $(x f)$، وحساب المجموع $\sum xf$

٤- حساب الوسط الحسابي بتطبيق المعادلة رقم (٣-٢) .

فئات الوزن (C)	التكرارات f	مراكز الفئات x	$x\ f$
32-34	4	(32+34)÷2=33	4×33=132
34-36	7	35	7×35=245
36-38	13	37	13×37=481

38-40	10	39	$10\times39=390$
40-42	5	41	$5\times41=205$
42-44	1	43	$1\times43=43$
المجموع	40		1496

إذا الوسط الحسابي لوزن التلميذ هو :

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_i f_i}{\sum_{i=1}^{6}f_i}=\frac{1496}{40}=37.4\ k.g$$

أي أن متوسط وزن التلميذ يساوي 37.4 k.g

خصائص الوسط الحسابي

يتصف الوسط الحسابي بعدد من الخصائص ، ومن هذه الخصائص ما يلي :

١- الوسط الحسابي للمقدار الثابت يساوى الثابت نفسه ، أي أنه إذا كانت قيم x هي : $x: a, a, \ldots, a$ ، فإن الوسط الحسابي هو:

$$\bar{x}=\frac{a+a+\ldots+a}{n}=\frac{na}{n}=a$$

ومثال على ذلك ، لو اخترنا مجموعة من 5 طلاب ، ووجدنا أن كل طالب وزنه 63 كيلوجرام ، فإن متوسط وزن الطالب في هذه المجموعة هو :

$$\bar{x}=\frac{63+63+63+63+63}{5}=\frac{315}{5}=63\ k.g$$

٢- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوى صفرا ، ويعبر عن هذه الخاصية بالمعادلة .

$$\sum(x-\bar{x})=0 \qquad (٣-٤)$$

ويمكن التحقق من هذه الخاصية باستخدام بيانات مثال (٣-١) ، نجد أن درجات الطلاب هي : 34, 32, 42, 37, 35, 40, 36, 40 ، والوسط الحسابي للدرجة هو $\bar{x}=37$ ، إذا :

x	34	32	42	37	35	40	36	40	296
$(x-\bar{x})$	34-37	32-37	42-37	37-37	35-37	40-37	36-37	40-37	0
$(x-37)$	-3	-5	5	0	-2	3	-1	3	

أي أن : $\sum(x-37)=0$

٣- إذا أضيف مقدار ثابت إلى كل قيمة من القيم ، فإن الوسط الحسابي للقيم المعدلة (بعد الإضافة) يساوى الوسط الحسابي للقيم الأصلية (قبل الإضافة) مضافا إليها هذا المقدار الثابت . فإذا كانت القيم هي : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، وتم إضافة مقدار ثابت (a) إلى كل قيمة من القيم ، ونرمز للقيم الجديدة بالرمز y ، أي أن $y=x+a$ ، فإن : الوسط الحسابي لقيم y (القيم بعد الإضافة)

هو:

$$\bar{y} = \bar{x} + a \qquad (٣-٥)$$

حيث أن $\bar{y}$ هو الوسط الحسابي للقيم الجديدة ، ويمكن التحقق من هذه الخاصية باستخدام بيانات مثال رقم (٣-١) .

إذا قرر المصحح إضافة 5 درجات لكل طالب ، فإن الوسط الحسابي للدرجات المعدلة يصبح قيمته {(37+5)=42} ، والجدول التالي يبين ذلك .

x	34	32	42	37	35	40	36	40	296
$y=(x+5)$	34+5	32+5	42+5	37+5	35+5	40+5	36+5	40+5	336
	39	37	47	42	40	45	41	45	

نجد أن مجموع القيم الجديدة هو : $\sum y = 336$ ، ومن ثم يكون الوسط الحسابي للقيم الجديدة هو :

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{336}{8} = 42 \longrightarrow (\bar{x} + 5 = 37 + 5 = 42)$$

٤- إذا ضرب مقدار ثابت (a) في كل قيمة من القيم ، فإن الوسط الحسابي للقيم المعدلة (القيم الناتجة بعد الضرب) يساوى الوسط الحسابي للقيم الأصلية (القيم بعد التعديل) مضروبا في هذا المقدار الثابت . أى أنه إذا كان : $y = a\ x$ ، ويكون الوسط الحسابي للقيم الجديدة y هو :

$$\bar{y} = a\ \bar{x} \qquad (٣-٦)$$

ويمكن للطالب أن يتحقق من هذه الخاصية باستخدام نفس بيانات المثال السابق . فإذا كان تصحيح الدرجة من 50 ، وقرر المصحح أن يجعل التصحيح من 100 درجة ، بمعنى أنه سوف يضرب كل درجة في قيمة ثابتة (a=2) ، ويصبح الوسط الحسابي الجديد هو :

$$\bar{y} = a\ \bar{x} = 2(37) = 74$$

٥- مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي أقل ما يمكن ، أي أن:

$$\sum (x-\bar{x})^2 < \sum (x-a)^2 \quad if \quad a \neq \bar{x} \qquad (٣-٧)$$

وفي المثال السابق فإن : $\sum (x-37)^2 < \sum (x-a)^2$ لجميع قيم $a \neq 37$

ثالثا: الوسط الحسابي المرجح

في بعض الأحيان يكون لكل قيمة من قيم المتغير أهمية نسبية تسمى أوزن ، أو ترجيحات ، وعدم أخذ هذه الأوزان في الاعتبار عند حساب الوسط الحسابي ، تكون القيمة المعبرة عن الوسط الحسابي غير دقيقة ، فمثلا لو أخذنا خمسة طلاب ، وسجلنا درجات هؤلاء الطلاب في مقرر

الإحصاء التطبيقي ، وعدد ساعات الاستذكار في الأسبوع .

مسلسل	1	2	3	4	5	sum
x (الدرجة)	23	40	36	28	46	173
w (عدد ساعات الاستذكار)	1	3	3	2	4	

نجد أن الوسط الحسابي غير المرجح للدرجة الحاصل عليها الطالب هي :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{23+40+36+28+46}{5} = \frac{173}{5} = 34.6$$

وإذا أردنا أن نحسب الوسط الحسابي للدرجات x المرجحة بعدد ساعات الاستذكار w ، يتم تطبيق المعادلة التالية :

$$(\bar{w}) = \frac{\sum xw}{\sum w} = \frac{23\times1+40\times3+36\times3+28\times2+46\times4}{1+3+3+2+4}$$

$$= \frac{23+120+108+56+184}{13} = \frac{491}{13} = 37.769$$

وهذا الوسط المرجح أكثر دقة من الوسط الحسابي غير المرجح .

إذا الوسط الحسابي المرجح $(\bar{w})$ يحسب بتطبيق المعادلة التالية :

$$(\bar{w}) = \frac{\sum xw}{\sum w} \qquad (٣-٨)$$

مزايا وعيوب الوسط الحسابي

يتميز الوسط الحسابي بالمزايا التالية :

- أنه سهل الحساب .
- يأخذ في الاعتبار كل القيم .
- أنه أكثر المقاييس استخداما وفهما .

ومن عيوبه .

- أنه يتأثر بالقيم الشاذة والمتطرفة .
- يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية .
- يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة .

الوسيط Median

هو أحد مقاييس النزعة المركزية، والذي يأخذ في الاعتبار رتب القيم ، ويعرف الوسيط بأنه القيمة التي يقل عنها نصف عدد القيم $(n/2)$ ، ويزيد عنها النصف الآخر $(n/2)$ ، أي أن 50% من القيم أقل منه، 50% من القيم أعلى منه. وفيما يلي كيفية حساب الوسيط في حالة البيانات غير مبوبة ، والبيانات المبوبة.

أولا: الوسيط للبيانات غير المبوبة

لبيان كيف يمكن حساب الوسيط للبيانات غير المبوبة ، نتبع الخطوات التالية:

- ترتب القيم تصاعديا .
- تحديد رتبة الوسيط، وهي : رتبة الوسيط $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$
- إذا كان عدد القيم (n) فردي فإن الوسيط هو:

$$\text{الوسيط} = \text{القيمة رقم } \left(\frac{n+1}{2}\right) \qquad (٣-٩)$$

- إذا كان عدد القيم (n) زوجي، فإن الوسيط يقع بين القيمة رقم $(n/2)$ ، والقيمة رقم $((n/2)+1)$ ، ومن ثم يحسب الوسيط بتطبيق المعادلة التالي:

$$\text{الوسيط} = \frac{\text{القيمة رقم } \left(\frac{n}{2}\right) + \text{القيمة رقم } \left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}$$

مثـال:

تم تقسيم قطعة أرض زراعية إلى 17 وحدة تجريبية متشابهة ، وتم زراعتها بمحصول القمح ، وتم استخدام نوعين من التسميد هما : النوع (a) وجرب على 7 وحدات تجريبية ، والنوع (b) وجرب على 10 وحدات تجريبية ، وبعد انتهاء الموسم الزراعي ، تم تسجيل إنتاجية الوحدة بالطن / هكتار ، وكانت على النحو التالي :

النوع (a)	1.2	2.75	3.25	2	3	2.3	1.5			
النوع (b)	4.5	1.8	3.5	3.75	2	2.5	1.5	4	2.5	3

والمطلوب حساب وسيط الإنتاج لكل نوع من السماد المستخدم، ثم قارن بينها.

الحـل

أولا : حساب وسيط الإنتاج للنوع الأول (a)

- ترتيب القيم تصاعديا :

				قيمة الوسيط			
الإنتاج	1.2	1.5	2	2.3	2.75	3	3.25
الرتبة	1	2	2	4	5	6	7
				رتبة الوسيط			

- عدد القيم فردى $(n = 7)$
- إذا رتبة الوسيط هي: $((n+1)/2 = (7+1)/2 = 4)$.
- ويكون الوسيط هو القيمة رقم 4 ، أي أن وسيط الإنتاج للنوع a هو:

$Med_a = 2.3$ طن / هكتار

ثانيا : حساب وسيط الإنتاج للنوع الثاني (b) :

- ترتيب القيم تصاعديا .

قيمة الوسيط = $\frac{2.5 + 3}{2}$ = 2.75

الإنتاج	1.5	1.8	2	2.5	2.5	3	3.5	3.75	4	4.5
الرتبة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5.5 رتبة الوسيط

- عدد القيم زوجي ($n = 10$) إذا
- رتبة الوسيط هي : $((n+1)/2 = (10+1)/2 = 5.5)$.
- الوسيط = الوسط الحسابي للقيمتين الواقعتين في المنتصف (رقم 5 ، 6) .

$$Med_b = \frac{2.5+3}{2} = 2.75$$ طن / هكتار

وبمقارنة النوعين من السماد ، نجد أن وسيط إنتاجية النوع (a) أقل من وسيط إنتاجية النوع (b) ، أي أن : $Med_b > Med_a$.

ثانيا: الوسيط للبيانات المبوبة

لحساب الوسيط من بيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري ، يتم إتباع الخطوات التالية .

- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .
- تحديد رتبة الوسيط : $\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{\sum f}{2}\right)$
- تحديد فئة الوسيط كما في الشكل التالي :

تكرار متجمع صاعد سابق f_1 — رتبة الوسيط $(n/2)$ — تكرار متجمع صاعد لاحق f_2

الحد الأدنى لفئة الوسيط (A) ← الوسيط Med ← الحد الأعلى لفئة الوسيط

- ويحسب الوسيط ، بتطبيق المعادلة .

$$Med = A + \frac{\frac{n}{2} - f_1}{f_2 - f_1} \times L \qquad (١١-٣)$$

حيث أن :

L هي طول فئة الوسيط، وتحسب بالمعادلة التالية:

طول الفئة = الحد الأعلى – الحد الأدنى

$$L = Upper - Lower$$

مثال (٣-٤)

فيما يلي توزيع 50 عجل متوسط الحجم ، حسب احتياجاته اليومية من الغذاء الجاف بالكيلوجرام

فئات الاحتياجات اليومية	1.5 -	4.5 -	7.5 -	10.5 -	13.5 – 16.5
عدد العجول f	4	12	19	10	5

والمطلوب : حساب الوسيط : أ - حسابيا ب- بيانيا

الحل

أولا : حساب الوسيط حسابيا

- رتبة الوسيط : $\frac{n}{2} = \frac{\sum f}{2} = \frac{50}{2} = 25$
- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :

أقل من	تكرار متجمع صاعد	
1.5	0	
4.5	4	
A 7.5	f_1 16	
Med (الوسيط)	25	رتبة الوسيط
10.5	f_2 35	
13.5	45	
16.5	50	

- تحديد فئة الوسيط : وهى الفئة التي تشمل قيمة الوسيط ، وهي قيمة أقل منها $(n/2)$ من القيم ، ويمكن معرفتها بتحديد التكرارين المتجمعين الصاعدين الذين يقع بينهما رتبة الوسيط $(n/2)$ ، وفى الجدول أعلاه نجد أن رتبة الوسيط (25) تقع بين التكرارين المتجمعين (35 , 16) ، ويكون الحد الأدنى لفئة الوسيط هو المناظر للتكرار المتجمع الصاعد السابق 7.5 ، والحد الأعلى لفئة الوسيط هو المناظر للتكرار المتجمع الصاعد اللاحق 10.5 . أى أن فئة الوسيط هي : (7.5-10.5) .

- وبتطبيق معادلة الوسيط رقم (٣-١١) على هذا المثال نجد أن :

$$A=7.5\ ,\ f_1=16\ ,\ f_2=35\ ,\ L=10.5-7.5=3$$

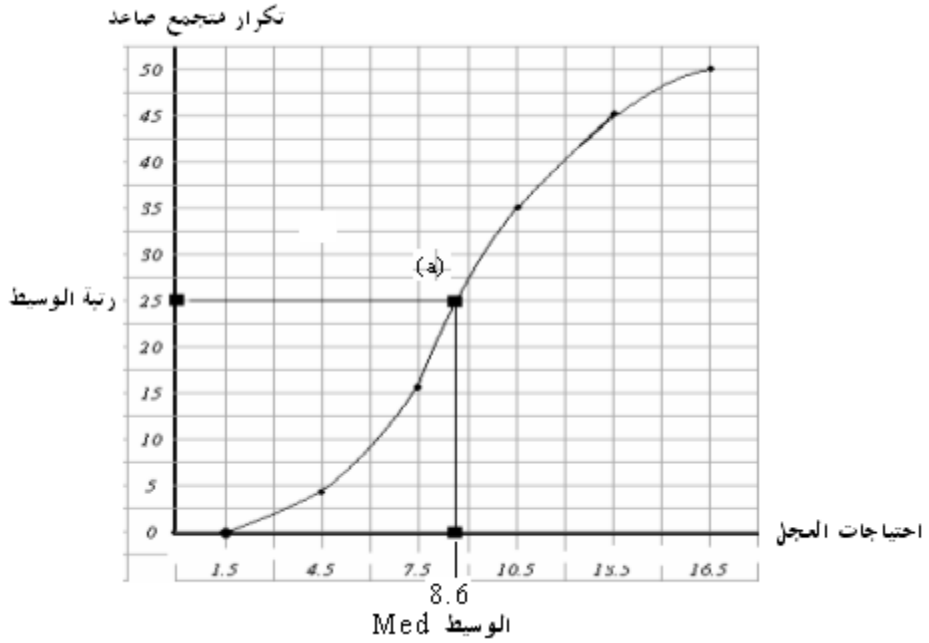
إذا الوسيط قيمته هي :

$$Med=A+\frac{\frac{n}{2}-f_1}{f_2-f_1}\times L=7.5+\frac{25-16}{35-16}\times 3$$

$$=7.5+\frac{9}{19}\times 3=7.5+\frac{27}{19}=7.5+1.421=8.921\ k.g$$

ثانيا :<u>حساب الوسيط بيانيا</u>

- تمثيل جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد بيانيا .



- تحديد رتبة الوسيط (25) على المنحنى التكراري المتجمع الصاعد . ثم رسم خط مستقيم أفقي حتى يلقى المنحنى في النقطة (a) .
- إسقاط عمود رأسي من النقطة (a) على المحور الأفقي .
- نقطة تقاطع الخط الرأسي مع المحور الأفقي تعطى قيمة الوسيط .
- الوسيط كما هو مبين في الشكل Med = 8.6 .

مزايا وعيوب الوسيط

من مزايا الوسيط

١- لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة .

٢- كما أنه سهل في الحساب .

٣- مجموع قيم الانحرافات المطلقة عن الوسيط أقل من مجموع الانحرافات المطلقة عن أي قيم أخرى . أي أن : $\sum|x-Med|\le\sum|x-a|\ ,\ a\neq Med$

ومن عيوب الوسيط

١- أنه لا يأخذ عند حسابه كل القيم في الاعتبار، فهو يعتمد على قيمة أو قيمتين فقط .
٢- يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية المقاسة بمعيار اسمي nominal

المنوال Mode

يعرف المنوال بأنه القيمة الأكثر شيوعا أو تكرارا ، ويكثر استخدامه في حالة البيانات الوصفية ، لمعرفة النمط (المستوى) الشائع، ويمكن حسابة للبيانات المبوبة وغير المبوبة كما يلي:

أولا: حساب المنوال في حالة البيانات غير المبوبة

المنوال (Mod) = القيمة (المستوى) الأكثر تكرارا

ثانيا: حساب المنوال في حالة البيانات المبوبة (طريقة الفروق)

$$Mod = A + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times L$$

حيث أن :

A : الحد الأدنى لفئة المنوال (الفئة المناظرة لأكبر تكرار) .

d_1 : الفرق الأول = (تكرار فئة المنوال – تكرار سابق)

d_2 : الفرق الثاني = (تكرار فئة المنوال – تكرار لاحق)

L : طول فئة المنوال .

فئــة المنوال = الفئة المناظرة لأكبر تكرار

d_1 = (تكرار فئة المنوال – تكرار سابق) ← تكرار سابق

d_2 = (تكرار فئة المنوال – تكرار سابق) ← تكرار لاحق

تكرار فئة المنوال

مثـال (٣-٥)

اختيرت عينات عشوائية من طلاب بعض أقسام كلية علوم الأغذية والزراعة ، وتم رصد درجات هؤلاء الطلاب في مقرر ١٢٢ إحصاء التطبيقي ، وكانت النتائج كالتالي:

قسم وقاية النباتات	80	77	75	77	77	77	65	70	58	67
قسم علوم الأغذية	88	68	60	75	93	65	77	85	95	90
قسم الاقتصاد	80	65	69	80	65	88	76	65	86	80
قسم الإنتاج الحيواني	85	73	69	85	73	69	69	73	72	85

والمطلوب حساب منوال الدرجات لكل قسم من الأقسام :

الحـل

هذه البيانات غير مبوبة ، لذا فإن :

المنوال = القيمة الأكثر تكرارا

والجدول التالي يبين منوال الدرجة لكل قسم من الأقسام .

القسم	القيمة الأكثر تكرار	القيمة المنوالية
قسم وقاية النباتات	الدرجة 77 تكررت 4 مرات	المنوال = 77 درجة
قسم علوم الأغذية	جميع القيم ليس لها تكرار	لا يوجد منوال
قسم الاقتصاد	الدرجة 65 تكررت 3 مرات الدرجة 80 تكررت 3 مرات	يوجد منوالان هما : المنوال الأول = 65 المنوال الثاني = 80
قسم الإنتاج الحيواني	الدرجة 69 تكررت 3 مرات الدرجة 73 تكررت 3 مرات الدرجة 85 تكررت 3 مرات	يوجد ثلاث منوال هي : المنوال الأول = 69 المنوال الثاني = 73 المنوال الثالث = 85

مثال (٣-٦)

فيما يلي توزيع 30 أسرة حسب الإنفاق الاستهلاكي الشهري لها بالألف ريال .

فئات الإنفاق	2 -	5 -	8 -	11 -	14 - 17
عدد الأسر f	4	7	10	5	4

والمطلوب حساب منوال الإنفاق الشهري للأسرة، باستخدام طريقة الفروق .

الحل

لحساب المنوال لهذه البيانات يتم استخدام المعادلة رقم (٣-١٢) ، ويتم إتباع الآتي :

- تحديد الفئة المنوالية

الفئة المنوالية هي الفئة المناظرة لأكبر تكرار : (8-11)

- حساب الفروق d ، حيث أن :

$$d_1 = (10 - 7) = 3 \quad d_2 = (10 - 5) = 5$$

- تحديد الحد الأدنى للفئة المنوالية $(A = 8)$ ، وكذلك طول الفئة $(L = 3)$
- وبتطبيق المعادلة الخاصة بحساب المنوال فى حالة البيانات المبوبة . نجد أن :

$$Mod = A + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times L$$

$$= 8 + \frac{3}{3+5} \times 3 = 8 + 1.125 = 9.125$$

٤- الاختبار البعدي:

سيتم لاحقًا.

المصادر:

١. "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الأسبوعية الثالثة لمادة الرياضيات التطبيقية:

" الأسس و اللوغاريتمات "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

بـ مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

تـ الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على الأسس و قوانينها و حل المعادلات المثلثية.

ثانياً: أتقان و فهم الأسس و قوانينها و حل المعادلات المثلثية.

ثـ أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. حل المعادلات الأسية.

٢. الاستفادة من الأسس في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف الأسس و قوانينها و التي قد سبق للطالب أن أخذها في المراحل السابقة.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" الأسس و اللوغاريتمات "

تعريف الأس:

العدد الذي يكتب فوق العامل ليدل على عدد مرات تكرار ذلك العامل (العامل × نفسه) كم مرة. مثل:

$$2^2 = 2 \times 2$$

$$x^3 = x.x.x$$

قوانين الأسس:

١) عند الضرب تجمع الأسس جمعاً جبرياً على أن تكون الأساسات متساوية، مثل:

٢) عند القسمة تطرح الأسس على أن تكون الأساسات متساوية، مثل:

$$\sqrt[b]{X^a} = X^{a/b}$$

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

٣) عند إزالة علامة الجذر يقسم أس المقدار (داخل الجذر) على دليل الجذر، مثل:

$$X^a \cdot X^b = X^{a+b}$$

$$y \cdot x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot y^3$$

٤) عند رفع مقدار إلى قوة (أس لأس المقدار) يضرب أس المقدار في تلك القوة، مثل:

$$\left(X^a\right)^b = X^{a.b}$$

٥) كل مقدار مرفوع للأس صفر يساوي (* و هذا يعني أن المقدار مقسوم على نفسه، مثل:

$$X^0 = \frac{X^1}{X^1} = X^{1-1} = X^0 = 1$$

٦) عند نقل مقدار أو عامل مرفوع لأس معين من البسط إلى المقام أو بالعكس تتغير إشارة ذلك الأس، مثل:

$$\frac{X^{a}}{X^{b}} = \frac{X^{-b}}{X^{-a}}$$

٧) تتساوى الأسس إذا تساوت الأساسات و العكس صحيح أيضاً، مثل:

$$X^{2} = 9$$
$$X^{2} = 3^{2}$$
$$\therefore X = 3$$

مثال:

جد ناتج المقدار الآتي: $\frac{\left(2^{x}\right)^{x-1}}{2^{x-1}} \div \frac{\left[(2)^{x-1}\right]^{x+1}}{4^{x+1}}$

الحل:

$$\frac{2^{x(x-1)}}{2^{x-1}} \times \frac{2^{2x+2}}{2^{(x+1)(x-1)}}$$
$$2^{x^{2}-x-x+1} \times 2^{2x+2-x^{2}+1}$$
$$= 2^{4} = 16$$

مثال:

جد قيمة X في المعادلة الأسية الآتية: $5(5^{X} + 5^{-X}) = 26$

الحل:

$$5(5^{X} + \frac{1}{5^{X}}) = 26$$
$$(5^{X} + \frac{1}{5^{X}}) = \frac{26}{5}$$

نفرض أن $5^{X} = a$

$$(a + \frac{1}{a}) = \frac{26}{5}$$

نضرب طرفي المعادلة في 5a ينتج:

$$5a^{2} + 5 = 26a$$
$$5a^{2} - 26a + 5 = 0$$
$$(5a - 1)(a - 5) = 0$$
$$a = \frac{1}{5} = 5^{-1} = 5^{X}$$
$$\therefore X = -1$$
$$a = 5 = 5^{x}$$
$$\therefore X = 1$$

مثال:

جد قيمة X و Y اللتين تحققان المعادلتين الآتيتين:

$$2^X - 8^{Y+1} = 0$$
$$9^Y = 3^{X-9}$$

الحل:

$$2^X = 8^{Y+1}$$
$$2^X = 2^{3(Y+1)}$$
$$\therefore X = 3Y + 3 \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$3^{2Y} = 3^{X-9}$$
$$\therefore 2Y = X - 9 \ldots\ldots\ldots (2)$$

بتعويض قيمة X الموضحة في معادلة (* في المعادلة (* ينتج:

$$2Y = 3Y + 3 - 9 = 3Y - 6$$
$$2Y - 3Y = -6$$
$$-Y = -6$$
$$Y = 6$$
$$X = 3Y + 3$$
$$\therefore X = 3 \times 6 + 3 = 21$$
$$X = 21$$

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

سيتم بعد نهاية الموضوع.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

******وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الثالثة و العشرون لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أ- الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص و ما دار سابقًا.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التفاضل "

مثال:

عددان موجبان مجموعهما ٢٠، جد مقدار العددين عندما يكون حاصل ضربهما اكبر ما يمكن و عندما يكون مجموع مربعيهما أقل ما يمكن ؟

الحل:

نفرض العدد الأول $= X$

$\therefore$ العدد الثاني $= 20 - X$

$$P = X(20 - X)$$
$$P = 20X - X^2$$
$$\frac{dP}{dX} = 20 - 2X = 0$$
$$\therefore X = \frac{20}{2} = 10$$
$$20 - X = 20 - 10 = 10$$
$$\frac{d^2P}{dX} = -2$$
$$S = X^2 + (20 - X)^2 = X^2 + 400 - 40X + X^2$$
$$S = 2X^2 - 40X + 400$$
$$\frac{dS}{dX} = 4X - 40 = 0$$
$$\therefore X = \frac{40}{4} = 10$$
$$20 - X = 20 - 10 = 10$$
$$\frac{d^2S}{dX} = +4$$

مثال:

بالون كروي الشكل يملأ بالغاز بمعدل (١٠٠ قدم^3/دقيقة)، فإذا بقى ضغط الغاز ثابتًا ما هو معدل زيادة نصف قطر البالون في اللحظة التي يكون فيها نصف القطر يساوي ٣ قدم ؟

الحل:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2} = \frac{100}{4\pi 3^2} = \frac{100}{36\pi} = 0.884 ft/min.$$

مثال:

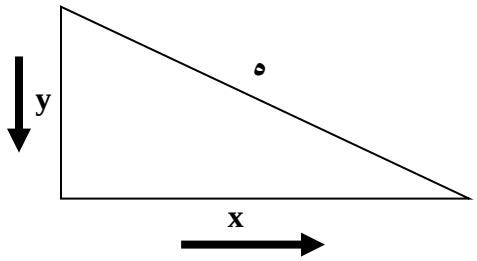
سلّم كهربائي طوله ٥ م مستند في أعلاه على جدار أرتفاعه ٣ م و نهايته السفلى على الأرض، فإذا بدأت النهاية السفلى للسلّم تتحرك بمعدل ١ م/ساعة عن الجدار ما هي سرعة انزلاق السلّم نحو الأسفل ؟

الحل:

$$5^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\therefore x = 4m.$$



$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2\times 4\times 1 = -2\times 3\times \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{6} = -1.334 m./hr.$$

مثال:

يراد اختبار التحمل الحراري لأنبوب معدني على شكل اسطوانة دائرية قائمة لغرض استعماله في منظومة ري بالرش، حيث أخذ منه نموذج بطول ٥٠ سم و بقطر ٢,٥ سم و تم تسخينه حسب المواصفات القياسية للاختبار فكانت نتائج الاختبار أن أزداد طوله بمعدل ٠,٠٠٣ سم/دقيقة و توسّع قطره بمعدل ٠,٠٠٥ سم/دقيقة. بيّن مدى صلاحية الأنبوب للاستعمال علمًا أن المواصفات القياسية للتغير الحجمي للأنبوب هي (٠,٥ سم^3/دقيقة) ؟

الحل:

$$v = \frac{\pi}{4}D^2 L$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{4}\left[(D^2.\frac{dL}{dt}) + (L.2D\frac{dd}{dt})\right] = \frac{\pi}{4}\left[(2.5^2\times 0.003) + (50\times 2\times 2.5\times 0.005)\right] = 0.997 cm.^3/min.$$

الأنبوب لا يصلح للاستعمال.

٤ـ الاختبار البعدي:

س١/: قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠ م، جد كلاً من بعديها لتكون مساحتها أكبر ما يمكن؟.

س٢/: يراد اختبار التحمل الحراري لأنبوب معدني على شكل اسطوانة دائرية قائمة لغرض استعماله في منظومة ري بالرش، حيث أخذ منه نموذج بطول ٥٠ سم و بقطر ٢,٥ سم و تم تسخينه حسب المواصفات القياسية للاختبار فكانت نتائج الاختبار أن أزداد طوله بمعدل ٠,٠٠٣ سم/دقيقة و بقى قطره دون تغيير. بيّن مدى صلاحية الأنبوب للاستعمال علمًا أن المواصفات القياسية للتغير الحجمي للأنبوب هي (٠,٥ سم^{٣}/دقيقة)؟

المصادر:

١ـ "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الثالثة عشر لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ

٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص و ما دار سابقًا.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

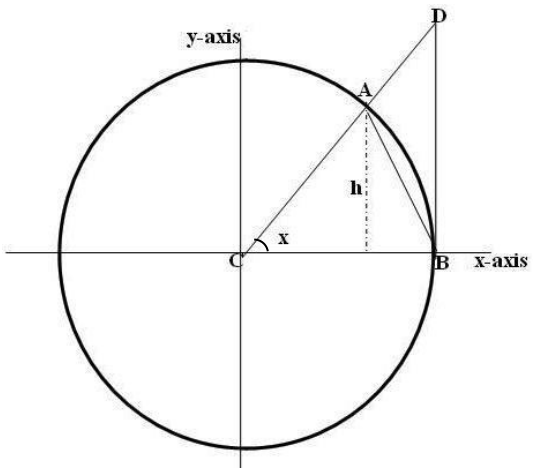
" التفاضل "

الدوال المتسامية:

تسمى كل دالة ليست جبرية بالـ "الدالة المتسامية"، حيث تنتمي إليها الدوال المثلثية و العكسية و الأسية و اللوغارتمية.

الدوال المثلثية: قبل البدء باشتقاق الدوال المثلثية علينا أثبات أن ($\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$) و كما يأتي:

لنفرض مبدئيًا أن زاوية x (بالقياس الدائري) هي زاوية صغيرة جدًا تقترب من الصفر و هي زاوية مركزية في دائرة مركزها C و ضلعا الزاوية x هما نصفا قطري الدائرة CA و CB و كما في الرسم التوضيحي الآتي:



نصف قطر الدائرة $CA = CB = R(Redius)$

$$\sin x = \frac{h}{R}; h = R\sin x$$

$$\tan x = \frac{BD}{R}; BD = R\tan x$$

مساحة المثلث ABC $= \frac{1}{2}CB.h = \frac{1}{2}R.R\sin x = \frac{1}{2}R^2\sin x$

مساحة القطاع ABC $= \frac{1}{2}xR^2$

مساحة المثلث CDB $= \frac{1}{2}R^2\tan x$

نلاحظ من الرسم أن مساحة المثلث ABC أصغر من مساحة القطاع ABC و التي بدورها أصغر من مساحة المثلث CDB، و يمكن كتابة هذا بشكل متباينة و كما يأتي:

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}xR^2 < \frac{1}{2}R^2\tan x$$

وبقسمة المتباينة على $\frac{1}{2}R^2\sin x$ ينتج:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

وبقلب المتباينة ينتج:

$$1 < \frac{\sin x}{x} < \cos x$$

وبطرح المتباينة من 1 ينتج:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

عندما تقترب x من الصفر فإن $\cos x$ يقترب من الـ 1 فتصبح المتباينة بالشكل الآتي:

$$\lim_{x\to 0} 1 - \frac{\sin x}{x} = o$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

* $y = \sin x$

$f(x) = \sin x$

$f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x.\cos\Delta x + \cos x.\sin\Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sin x.0 + \cos x.1 - \sin x = \cos x$$

* $y = \cos x$

الحل:

$f(x) = \cos x$

$f(x+\Delta x) = \cos(x+\Delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x.\cos\Delta x - \sin x.\sin\Delta x - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x.1 - \sin x.1 - \cos x = -\sin x$$

* $y = \tan x$

الحل:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x.\cos x - \sin x.-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

س١/: جد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ لما يأتي:

* $y = z^{\frac{3}{2}}$ عندما $z = x^2 + 1$

س٢/: جد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ لما يأتي:

$$\frac{X^2 - 1}{1 + X}$$

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الأسبوعية الثامنة لمادة الرياضيات التطبيقية:

"المتجهات "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على المتجهات و الكميات الاتجاهية و ايجاد الزاوية بين المتجهين.

ثانياً: أتقان و فهم المتجهات و الكميات الاتجاهية و ايجاد الزاوية بين المتجهين.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد قيمة المتجهات و ايجاد الزاوية بين المتجهين.

٢. الاستفادة من المتجهات في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف المتجهات و الكميات الاتجاهية و غير الاتجاهية و بعض خواصها.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" المتجهات "

تعريف المتجهات:

تسمى الكميات ذات القيمة و الاتجاه بالمتجهات أو الكميات المتجهة، و ذلك لتفسير كثير من المفاهيم الفيزيائية مثل القوة و الحركة و السرعة، فإذا أخبرت أحداً بأنك قطعت مسافة معينة باتجاه الشمال مثلاً فإنك تتحدث بلغة المتجهات. أما الكميات التي لا ترتبط بأي اتجاه تسمى الكميات غير المتجهة مثل الكثافة و الكتلة.

تمثيل المتجهات:

تمثل المتجهات بالرسم البياني و ذلك من نقطة بداية معينة ثم بالاتجاه المعين و ذلك بمقياس رسم مناسب.

و كذلك تمثل بالرموز (i يمثل الاتجاه بالمحور السيني و j يمثل الاتجاه بالمحور الصادي و k يمثل الاتجاه بالمحور العمودي z).

الصيغة العامة لأي متجه هي ($\vec{A} = ai + bj + ck$) على أن (a و b و c) ثوابت.

محصلة المتجهات هي المجموع الجبري لها.

مثال:

إذا كان لديك المتجهان $\vec{A} = -2i + 5j$ و $\vec{B} = 5i - 9j$ ، جد محصلتهما $\overrightarrow{R_1} = \vec{A} + \vec{B}$ و $\overrightarrow{R_2} = \vec{A} - \vec{B}$ ؟

الحل:

$$\overrightarrow{R_1} = (-2+5)i + (5-9)j = 3i - 4j$$

$$\overrightarrow{R_2} = (-2-5)i + (5+9)j = -7i + 14j = 7(-i + 2j)$$

إيجاد قيمة المتجه:

قيمة أي متجه عبارة عن الجذر التربيعي لمربع قيم ثوابته، أي أن:

من الصيغة العامة للمتجه:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2}$$

لو كان لدينا المتجه $\overrightarrow{\mathbf{R_1}} = \mathbf{3i - 4j}$ فإن قيمته:

$$|\mathbf{R_1}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

ضرب المتجهات

هناك نوعان من ضرب المتجهات:

الأول: ضرب غير أتجاهي لمتجهين و يدعى بـ (الضرب النقطوي Dot Product) و يعتمد على جيب تمام الزاوية بين المتجهين، أي أن:

$$\left|\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}\right| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$$

$$\left|\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}\right| = \mathbf{a_1 a_2 .....a_n + b_1 b_2 .....b_n + c_1 c_2 .....c_n}$$

الثاني: ضرب أتجاهي لمتجهين و يدعى بـ (الضرب المتصالب Cross Product) و هو عمودي على المتجهين بحيث يصنع زاوية مقدارها 90^o بينهما و له قيمة تعتمد على جيب الزاوية بين المتجهين، أي أن:

$$\left|(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}})\right| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$$

$$\left|(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}})\right| = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \end{bmatrix}$$

ثم نجد مفكوك هذا المحدد الثلاثي كي نجد قيمة الضرب المتصالب.

مثال:

إذا كان لديك المتجهان $\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{-2i + 5j}$ و $\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{5i - 9j}$، جد قيمة الضرب النقطوي و الضرب المتصالب لهما و الزاوية المحصورة بينهما ؟

الحل:

$$\left|\vec{A}.\vec{B}\right| = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

$$\therefore \left|\vec{A}.\vec{B}\right| = (-2)(5) + (5)(-9) = -10 - 45 = \left|-55\right| = 55$$

$$\left|(\vec{A}\times\vec{B})\right| = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left|(\vec{A}\times\vec{B})\right| = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 5 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix} = +k\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -9 \end{bmatrix} = k(18-25) = -7k$$

$$|A| = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$$|B| = \sqrt{(5)^2 + (-9)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$$

$$\left|(\vec{A}\times\vec{B})\right| = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$Q\ \vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\left|\vec{A}.\vec{B}\right|}{|A||B|} = \frac{55}{\sqrt{29}\times\sqrt{106}} = 0.992$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}(0.992) = 7.25°$$

$$Q\ \left|(\vec{A}\times\vec{B})\right| = |A||B|\sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{\left|(\vec{A}\times\vec{B})\right|}{|A||B|} = \frac{7}{\sqrt{29}\times\sqrt{106}} = 0.126$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}(0.126) = 7.25°$$

.....

واجب بيتي

س١/: أوجد قيمة الثابت b في معادلة المتجه $\vec{A} = 2i + bj + k$ و المتعامد مع المتجه $\vec{B} = 4i - 2j - 2k$ ؟

س٢/: اثبت أن المتجهين $\vec{A} = 2k + 2i - j$ و $\vec{B} = 3i - 5k - 4j$ متعامدان ؟

س٣/: جد قيمة الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A} = i + 2j$ و المتجه $\vec{B} = 4j - 2i$ بأستعمال:

١. الضرب النقطوي للمتجهين.
٢. الضرب المتصالب للمتجهين.

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

س١/: جد قيمة الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ و المتجه $\vec{B} = 4\mathbf{j} - 2\mathbf{i}$ بأستعمال الضرب النقطوي للمتجهين.

س٢/: جد قيمة الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ و المتجه $\vec{B} = 4\mathbf{j} - 2\mathbf{i}$ بأستعمال الضرب المتصالب للمتجهين.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الثامنة عشر لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ

٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص و ما دار سابقًا.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التفاضل "

مشتقة الدوال الأسية و اللوغارتمية:

إذا كان لدينا الدالة $(x = \ln y)$ و كما نعلم أن الـ $(\ln)$ هو اللوغاريتم الطبيعي الذي أساسه المقدار الثابت $(e = 2.718)$ و أن $(\ln e = 1)$، فإن معكوس هذه الدالة يسمى (دالة أسية) و هي دالة مستمرة لكل قيم x الحقيقة و تكتب بالشكل الآتي:

$$y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

أما الدالة اللوغارتمية فهي كالآتي:

$$y = \ln x = \log_e x$$

$$e^y = x$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$x \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

مثال: جد مشتقة الدوال الآتية بأبسط صورة:

$$y = x^2 . e^x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 e^x + e^x . 2x = x e^x (x + 2)$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}$$

الحل:

Put $u = -\frac{1}{2}x$

$\therefore y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\frac{1}{2}x} . -\frac{1}{2} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{2}$$

واجب بيتي

جد مشتقة الدوال الآتية بأبسط صورة:

$y = \ln(\ln x)$ * $y = x^3 . \ln(2x)$ * $y = \ln(\tan x + \sec x)$ * $y = \frac{e^x}{1+e^x}$ *

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

جد مشتقة الدوال الآتية بأبسط صورة:

س١/: $y = \ln(\ln x)$ س٢/: $y = \ln(\sin 3x)$

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الثامنة و العشرون لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التكامل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التكامل و أنواعه و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التكامل و أنواعه و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد التكامل و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التكامل و أنواعه في التطبيقات العملية المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التكامل و أنواعه و الفائدة منه في مجال الأختصاص.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التكامل "

المساحة بين منحنيين:

١. لو كانت الدالة متجانسة أو متماثلة بين المحورين، فإن المساحة تحت منحني الدالة تكون على شكل تكامل محدود بالصورة:

$$\int dy = \int_{-x}^{x} f(x)dx = 2\int_{0}^{x} f(x)dx$$

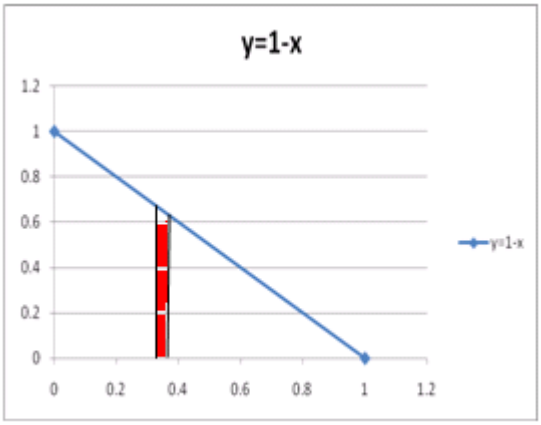
٢. و لو كانت الدالة غير متجانسة أو غير متماثلة ما بين المحورين، فإن المساحة تحت منحني الدالة تكون على شكل تكامل محدود بالصورة:

$$\int dy = \int_{-x}^{x} f(x)dx = 0$$

ملاحظة:

- إذا كانت الدوال مستمرة ضمن مجال معين و تعتمد على قيم x يعني ($\int_{a}^{b} f(x)dx$)، فإن المنحني الذي يحوي على قيم x أعلى من المنحني الثاني يعد هو الأكبر و كذا الحال إذاكانت الدالة تعتمد على قيم y، و نلاحظ بداية و نهاية الشريحة في المساحة.
- عند حل مسائل إيجاد المساحة بين منحنيين نلاحظ بعناية المساحة المطلوبة فقط و كذلك حدود التكامل بعد رسم المنحنيات (الدوال) المعطاة بالسؤال بصورة دقيقة و صحيحة.

مثال: جد المساحة المحصورة بين المستقيم $x + y = 1$ و الأحداثي السيني و الصادي؟



بعد رسم هذه الدالة نختار شريحة في المساحة المطلوبة أرتفاعها y و عرضها dx:

$$x+y=1$$

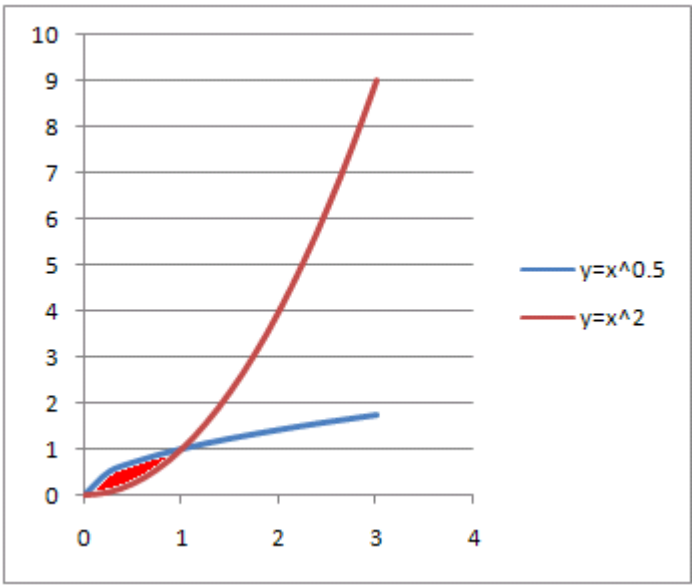
$$\therefore y=1-x$$

$$A=\int y dx$$

$$A_0^1=\int_0^1 (1-x)dx$$

$$A=\int_0^1 dx-\int_0^1 x dx=[x]_0^1-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y^2=x$ ؟



بعد رسم الدالتين نختار شريحة في المساحة المحصورة بينهما و هي المطلوبة أرتفاعها y و عرضها dx، و نلاحظ أن الأرتفاع هو عبارة عن الفرق بين الدالتين:

$$y = x^2$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$x^2 = \sqrt{x}; x^4 = x$$

$$\therefore x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0; x = 1; y = 0; y = 1$$

نقطتي تقاطع الدالتين $(1,1)$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx$$

$$A = \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

أسئلة عامة

س١/: جد المساحة المحصورة بين المنحني ($y = 4 - x^2$ - قطع ناقص) و المحور السيني؟

س2/: جد المساحة بين المنحنيين $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ و المستقيم $x = 1$؟

س٣/: جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = 4x - x^2$؟

<u>إيجاد طول قوس منحني:</u>

و ذلك بتطبيق أحد القوانين الآتية:

١. بالنسبة لقيم x: $L_A^B = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

٢. بالنسبة لقيم y: $L_C^D = \int_C^D \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

٣. في كثير من التطبيقات يكون المنحني مسارًا لنقطة متحركة أحداثياتها (x,y) أي دالتين لمتغير ثابت مثل الزمن t، بحيث أن $x = f(t), y = f(t)$، و عندئذ: $L_A^B = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$. و من الواضح أنه يمكن تبديل المتغير t بأي متغير آخر مثل الزاوية θ عند تمثيل المنحني.

مثال: جد طول القوس للمنحني $y=\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ للمسافة من $x=1$ إلى $x=4$؟

الحل:

$$y=\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}(x-1)^{1/2}=(x-1)^{1/2}$$

$$L=\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_1^4\sqrt{1+\left((x-1)^{1/2}\right)^2}\,dx$$

$$L=\int_1^4\sqrt{1+x-1}dx=\int_1^4\sqrt{x}dx=\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$L=\frac{2}{3}\left(4^{3/2}-1\right)=\frac{14}{3}$$

س/: أثبت أن طول القوس الذي تتحركه النقطة (x,y) على محيط دائرة نصف قطرها r يساوي $2\pi r$، إذا علمت أن $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ من $\theta=0$ إلى $\theta=2\pi$؟

<u>إيجاد الحجوم الدورانية:</u>

تسمى المجسمات الناتجة عن دوران منطقة مستوية حول محور في مستوياتها بـ "المجسمات الدورانية"، و هنالك طريقتان لإيجاد حجوم المجسمات الدورانية:

١. طريقة القُرصْ (Disc method): و فيها تجب ملاحظة مساحة المقطع العرضي للجسم الناتج عن الدوران $A(x)$ و يمكن تطبيق المعادلة الآتية لإيجاد الحجم:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$

مثال: جد حجم الجسم الناتج عن دوران الدالة $y=\sqrt{x}$ حول المحور السيني من {٠ إلى ٤}؟

الحل:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$

$$V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^4 xdx$$

$$V=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\pi\left[\frac{4^2}{2}\right]=8\pi$$

٢. طريقة الأغلفة الأسطوانية (Cylindrical covers): إن الطريقة السابقة ليست عملية في أحيان كثيرة، أما في طريقة الأغلفة الأسطوانية تؤخذ الشريحة موازية لمحور دوران الدالة و يمكن تطبيق المعادلتين الآتيتين لإيجاد الحجم:

- الشريحة موازية للمحور السيني:

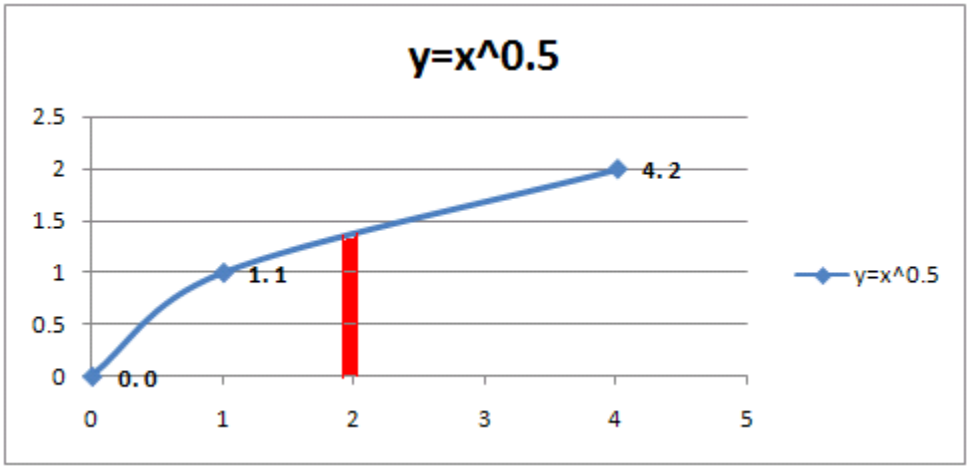
$$V = 2\pi\int_a^b f(y)ydx$$

- الشريحة موازية للمحور الصادي:

$$V = 2\pi\int_a^b f(x)xdx$$

حل المثال السابق بطريقة الأغلفة الأسطوانية:

الشريحة موازية للمحور السيني: $V = 2\pi\int_a^b f(y)ydx$



$$y = \sqrt{x}$$

$$y^2 = x$$

$$f(y) = x = y^2$$

$$V = 2\pi\int_a^b f(y)ydx$$

$$V = 2\pi\int_0^2 y^2.ydy = 2\pi\int_0^2 y^3dy$$

$$V = 2\pi\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\times 2^4 = 8\pi$$

س/: جد الحجم الناتج من دوران الدالة $y = x^2$ من $x = 1$ إلى $x = 3$ حول مستقيم موازٍ للمحور السيني ويبعد عنه بوحدة واحدة نحو الأسفل.

٤ـ الاختبار البعدي:

س١/: جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y^2 = x$ ؟

س٢/: أثبت أن طول القوس الذي تتحركه النقطة (x,y) على محيط دائرة نصف قطرها r يساوي $2\pi r$، إذا علمت أن $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\pi$ ؟

المصادر:

١. "حساب التفاضل و التكامل" – توماس.

٢. "رسم المخططات البيانية الهندسية" – مكرم انور الشيخ.

٣. "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الأسبوعية الثانية لمادة الرياضيات التطبيقية:

" النسب و العلاقات المثلثية "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

بـ مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

تـ الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على النسب و العلاقات المثلثية.

ثانياً: أتقان فهم و حفظ العلاقات المثلثية.

ثالثاً: أستعمال النسب و العلاقات المثلثية في التطبيقات المختلفة.

ثـ أهداف الوحدة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على أن:

١. حل المعادلات المثلثية.

٢. الاستفادة من النسب المثلثية.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف بعض النسب و العلاقات المثلثية و التي قد سبق للطالب أن أخذها في المراحل السابقة و في المحاضرة الأولى.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

العلاقات المثلثية:

في المثلث قائم الزاوية آنف الذكر ABC، نستطيع أن نقول و بتطبيق " نظرية فيثاغورس : المربع المنشأ على وتر في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين ":

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ ينتج: AB^2 و بقسمة طرفي المعادلة على

$$\frac{AB^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2}$$

و بالرجوع للنسب المثلثية الواردة الذكر فيما سبق نجد أن:

$$\sin\theta = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AB}$$

و بالتعويض ينتج:

$$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta \quad \ldots\ldots(1)$$

و هكذا بنفس الطريقة لو قسمنا نفس المعادلة على BC^2 لنتج:

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 \quad \ldots\ldots(2)$$

و لو قسمنا على AC^2 لنتج:

$$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta \quad \ldots\ldots(3)$$

مثال:

برهن صحة المتطابقة: $\dfrac{1}{1+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^{2`}\theta}} = \sin^2\theta$

الحل:

نأخذ الطرف الأيسر للمتطابقة

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta$$

$$\therefore = \frac{1}{1+\cot^2\theta}$$

$$\csc^2\theta = 1+\cot^2\theta$$

$$\therefore = \frac{1}{\csc^2\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

$$\therefore = \sin^2\theta$$

الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

مثال:

برهن صحة المتطابقة الآتية ($\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \csc\theta+\cot\theta$):

الحل:

نأخذ الطرف الأيسر

نضرب في مرافق المقام (نفس الحدود مع تغيير الإشارة) و هو $1+\cos\theta$ و نقسم عليه (النتيجة لا تتغير):

الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \csc\theta+\cot\theta$$

هناك بعض العلاقات المثلثية الخاصة (يجب حفظها) و هي:

$$\sin(\theta+\beta)=\sin\theta.\cos\beta+\cos\theta.\sin\beta$$

$$\sin(\theta-\beta)=\sin\theta.\cos\beta-\cos\theta.\sin\beta$$

$$\cos(\theta+\beta)=\cos\theta.\cos\beta-\sin\theta.\sin\beta$$

$$\cos(\theta-\beta)=\cos\theta.\cos\beta+\sin\theta.\sin\beta$$

$$\tan(\theta+\beta)=\frac{\tan\theta+\tan\beta}{1-\tan\theta.\tan\beta}$$

$$\tan(\theta-\beta)=\frac{\tan\theta-\tan\beta}{1+\tan\theta.\tan\beta}$$

مثال:

جد قيمة الزاوية θ التي تحقق المعادلة المثلثية الآتية ($2\sin\theta=\sin(60+\theta)$)؟

الحل:

$$\sin(\theta+\beta)=\sin\theta.\cos\beta+\cos\theta.\sin\beta$$

$$\beta=60°$$

$$=\sin\theta.\cos60°+\cos\theta.\sin60°$$

$$=\frac{1}{2}.\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\theta$$

و بضرب طرفي المعادلة في ٢ ينتج:

$$4\sin\theta=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$

و بقسمة طرفي المعادلة على $\cos\theta$ ينتج:

$$4\tan\theta=\tan\theta+\sqrt{3}$$

$$4\tan\theta-\tan\theta=\sqrt{3}$$

$$3\tan\theta=\sqrt{3}$$

$$\therefore\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\theta=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=30°$$

مثال:

برهن صحة المتطابقة الآتية ($\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} = \tan\theta$)؟

الحل:

نأخذ الطرف الأيسر

$$\cos(\theta+\beta) = \cos\theta.\cos\beta - \sin\theta.\sin\beta$$

$$\theta = \beta$$

$$\therefore \cos(\theta+\theta) = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta-\sin^2\theta}}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$$

$$\therefore \cos\theta^2 = 1-\sin^2\theta$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta$$

.....

واجب بيتي

س١/ برهن صحة المتطابقات الآتية:

١) $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta.\csc\theta$

٢) $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = 2\csc\theta$

٣) $\sqrt{\frac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}} = \tan\theta$

٤) $\frac{(1+\cos\theta).\tan\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} - 1 = \sec\theta$

٥) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta} = 1 + \frac{2\tan\theta}{1-\tan\theta}$

٦) $\sqrt{\frac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

س٢/ جد مساحة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه (5 cm.)؟
س٣/ جد قيمة الزاوية θ التي تحقق المعادلة المثلثية الآتية $2\cos\theta = \sin(30+\theta)$

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

س١/ جد مساحة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه (5 cm.)؟

س٢/ جد قيمة الزاوية θ التي تحقق المعادلة المثلثية الآتية $2\cos\theta = \sin(30+\theta)$

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الثانية و العشرون لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أ- الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص و ما دار سابقًا.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التفاضل "

مثال:

جد القيمة التقريبية للمقدار ($\sqrt[3]{0.026}$) باستعمال التفاضل؟

الحل:

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\therefore dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

نختار قيمة لـ x قريبة من **0.026** بحيث يمكن إيجاد الجذر التكعيبي لها و هي **0.027**

$$\therefore dx = 0.026 - 0.027 = -0.001$$

$$y = 0.027^{1/3} = 0.3$$

$$dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-0.001}{3\sqrt[3]{0.027^2}} = -0.0037$$

$$\sqrt[3]{0.026} = y + dy = 0.3 - 0.0037 = 0.2963$$

مثال:

قذف جسم رأسيًا نحو الأعلى بسرعة ١٦٠ م/ثا فوصل ارتفاع ($S = 160t - 16t^2$) م بعد ٤ ثواني. احسب أقصى ارتفاع يبلغه الجسم و سرعته عندما يصل ارتفاع ٢٥٦ م و هو صاعد أو يصل هذا الارتفاع و هو هابط ؟

الحل:

$$V = \frac{dS}{dt} = 160 - 32t = 0$$

$$\therefore t = \frac{160`}{32} = 5\,sec.$$

$$\therefore S = 160 \times 5 - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400m.$$

$$256 = 160t - 16t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \div 16$$

$$t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$(t-2)(t-8) = 0$$

$$t = 2\ldots\ldots\ldots; V = 160 - 32 \times 2 = +96m./sec.$$

$$t = 8\ldots\ldots\ldots; V = 160 - 32 \times 8 = -96m./sec.$$

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

س١/: المعادلة ($s = t^2 + 3t$) تمثل المسافة التي يقطعها جسم يتحرك على مسار مستقيم بالنسبة للزمن (t). جد سرعة و تعجيل هذا الجسم بعد مرور (٣ دقائق) من بدء الحركة ؟

س٢/: جد الخطأ التقريبي في مساحة و حجم كرة نصف قطرها ١٠ سم نتيجة الخطأ الذي حدث في قياس نصف قطرها و الذي بلغ ٢ ملم ($dr = 2mm.$) ؟

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الثانية عشرة لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ

٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص و ما دار سابقًا.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التفاضل "

تفاضل الدالة الضمنية:

تشتق بالنسبة لأحد المتغيرين، و المراد بـ "الدالة الضمنية" أن فيها قيم المشتقة تكون حاوية أو متضمنة المتغيرين عكس ما نلاحظه في باقي الدوال حيث تحوي المشتقة على قيمة لأحد المتغيرين.

مثال:

جد المشتقة الأولى للدالة الضمنية $x^2 + y^2 = 1$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}y} = -\frac{x}{y}$$

مثال:

جد المشتقة الأولى للدالة $x^2y^2 = x^2 + y^2$

$$x^2.2y\frac{dy}{dx} + y^2.2x = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$2x^2y\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 2x - 2xy^2$$

$$2y\frac{dy}{dx}\left(x^2 - 1\right) = 2x\left(1 - y^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{2}x\left(1 - y^2\right)}{\cancel{2}y\left(x^2 - 1\right)} = \frac{x\left(1 - y^2\right)}{y\left(x^2 - 1\right)}$$

واجب بيتي

جد مشتقة الدوال الضمنية الآتية و بأبسط صورة ؟:

$x^2 + 5xy + y^2 - 2x^3 = 0$ * $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 1$ * $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ *

تفاضل دالة الدالة:

عندما تكون y دالة تفاضلية للدالة u و تكون u دالة تفاضلية لـ x ففي هذه الحالة عندما يراد إيجاد $\frac{dy}{dx}$ فإننا نتبع ما يسمى بقاعدة السلسلة (Chain rule)، أي أن:

$$y = f(u)$$
$$u = f(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال:

جد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ للدالة $(y = u^2 + 3u - 7)$ عندما تكون $(u = 2x + 1)$ ؟

$$\frac{dy}{du} = 2u + 3$$
$$\frac{du}{dx} = 2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = (2u + 3).2 = 4u + 6$$
$$u = 2x + 1$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4(2x + 1) + 6 = 8x + 4 + 6 = 8x + 10$$

or :

$$y = (2x + 1)^2 + 3(2x + 1) - 7 = 4x^2 + 4x + 1 + 6x + 3 - 7$$
$$y = 4x^2 + 10x - 3$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = 8x + 10$$

واجب بيتي

جد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية:

$y = z^{\frac{3}{2}}$ * عندما $z = x^2 + 1$

$y = w^2 - w^{-1}$ * عندما $w = 3x$

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

س١/: جد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ لما يأتي:

* $y = z^{\frac{3}{2}}$ عندما $z = x^2 + 1$

س٢/: جد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ لما يأتي:

$$\frac{X^2 - 1}{1 + X}$$

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الثلاثون لمادة الرياضيات التطبيقية:

"الأحصاء "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ

٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على وصف البيانات لحالة معينة وتحليلها كمياً للوصول بالتالي إلى فهم أكثر وضوحاً لتلك الحالة.

ثانياً: أتقان و فهم البيانات التحليلية و إجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد بعض المؤشرات التي يمكن الاعتماد عليها في وصف الحالات المعينة.

٢. الاستفادة من تلك المؤشرات في التطبيقات العملية المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف الأحصاء و بعض المؤشرات التحليلية و الفائدة منه في مجال الأختصاص.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" الأحصاء "

مقاييس التشتت

Measures of Dispersion

١,٥ مقدمة:

تناولنا في الفصل السابق المتوسطات أو مقاييس النزعة المركزية والتي تعبر عن المستوى العام للظاهرة السياسية أو الاجتماعية محل البحث. ولكن ترى هل هذا يعتبر كافياً لوصف البيانات وتحليلها كمياً لنصل بالتالي إلى فهم أكثر وضوحاً للظاهرة محل الدراسة ؟ للإجابة على هذا السؤال نسوق المثال التالي :

مثال ١ :

نفترض أن لدينا شريحتين من شرائح المجتمع تعيشان في منطقتين مختلفتين وكانت دخولهم الأسبوعية (بالدولار الأمريكي) هي كما يلي :

المجموعة الأولى A :

70	75	71	75	74	76	73	78

المجموعة الثانية B :

99	56	80	100	29	70	65	93

وبحساب الوسط الحسابي للشريحتين المذكورتين في كل من المجموعتين – حسب ما أوضحناه في الفصل السابق – فإن الوسط الحسابي لدخول المجموعة الأولى :

$$\overline{X}_A = \frac{70+75+71+75+74+76+73+78}{8}$$

$$\overline{X}_A = \frac{592}{8} = 74 \text{ دولاراً}$$

أي أن الوسط الحسابي لدخل المجموعة A هو 74 دولاراً.

وكذلك بالنسبة للمجموعة B فإن الوسط الحسابي لدخولها هو :

$$\overline{X}_B = \frac{99+56+80+100+29+70+65+93}{8}$$

$$\overline{X}_B = \frac{592}{8} = 74 \quad \text{دولاراً}$$

والوسط الحسابي لدخل المجموعة B هو أيضاً 74 دولاراً.

ومعنى هذا أن المستوى العام لدخل الأفراد في المجموعتين واحد ويساوي 74 دولاراً. ولكن بإمعان النظر في دخول المجموعة الأولى نجد أنها متجانسة إلى حدٍ كبير أي أنها قريبة جداً من بعضها أو من الوسط الحسابي والذي يساوي 74 دولاراً. وهنا نقول أن تشتت الدخول قليل أو صغير. بينما دخول المجموعة الثانية غير متجانسة فهي بعيدة عن بعضها، أو عن الوسط الحسابي بشكل كبير. وهنا نقول أن تشتت دخول المجموعة الثانية كبير فهي أقل تجانساً (أو أكثر تشتتاً) من المجموعة الأولى.

(الفرق بين أكبر دخل وأصغر دخل في المجموعة الأولى: ٧٨-٧٠ =٨ دولارات فقط، بينما الفرق بين أكبر دخل وأصغر دخل في المجموعة الثانية: ١٠٠ - ٢٩-٧١ دولاراً)

نستنتج من هذا المثال بأن المتوسط ليس كافياً لتوصيف البيانات أو تحليلها كمياً. فها هو المتوسط واحد في المجموعتين ورغم ذلك فإن البيانات تختلف تماماً في مدى تشتتها (أو تجانسها). وهنا تبرز الحاجة إلى مقاييس كمية أو إحصائية ليقاس مدى تشتت البيانات ولتعطي للباحث بالتالي صورة أكثر وضوحاً وصدقاً للظاهرة السياسية محل الدراسة. وفيما يلي نتناول بعض مقاييس التشتت التي تخدم الغرض من هذا الكتاب وهي :

المدى، والتباين والانحراف المعياري، ومعامل اختلاف

٢,٥ المدى The Range

يعرّف المدى بأنه " الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة ".

فمدى المجموعة A في المثال رقم (١) هو : 8 = 70 – 78

ومدى المجموعة B في نفس المثال هو : 71 = 29 – 100

وواضح تماماً أن مدى المجموعة الثانية أكبر بكثير جداً من مدى المجموعة الأولى مما يعني أن المجموعة الثانية أكثر تشتتاً من المجموعة الأولى.

ومن تعريف المدى يتضح أنه مقياس بسيط جداً وأن كل المطلوب معرفته هو أكبر قيمة وأصغر قيمة فقط. ومن هذا التعريف نخرج بالملاحظات التالية :

١ – أن المدى يعتمد في حسابه على قيمتين فقط (أكبر قيمة وأصغر قيمة) وأنه يهمل بالتالي باقي القيم.

٢ – أنه لا يقيس تشتت البيانات عن متوسطها، فهو لا يشير – من قريب أو من بعيد – إلى متوسط البيانات (أو مركزها).

٣ – أنه حساس جداً لأي قيمة شاذة أو متطرفة والمثال التالي يوضح هذه النقطة بشيء من التفصيل.

مثال (٢) :

إذا كانت أعمار أعضاء السلطة التشريعية في بلد ما هي :

70 75 73 74 20 78 72

فإن المدى في هذه الحالة هو : 58 = 20 – 78

وهنا نلاحظ وجود قيمة شاذة بالنسبة لباقي القيم وهي 20 وهي أصغر قيمة. وإذا أهملت هذه القيمة (أو لم تكن موجودة أصلاً) لكان المدى :

$$78 - 70 = 8$$

وهذا يعني أن وجود قيمة شاذة (20) رفعت قيمة المدى من 8 سنوات إلى 58 سنة. وهذا يوضح مدى حساسية هذا المقياس للقيم الشاذة (أو المتطرفة).

ولكل هذه الأسباب – أو الملاحظات – فإن كثيراً من الإحصائين والباحثين لا يعتمدون كثيراً على المدى كمقياس للتشتت. ويستخدم فقط إذا كان المطلوب فكرة سريعة أو عامة (وليست دقيقة) عن مدى تشتت البيانات.

٣,٥ التباين The Variance :

يعتبر التباين أحد مقاييس التشتت المهمة لأنه من ناحية يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه، ومن ناحية أخرى لأنه يقيس التشتت عن الوسط الحسابي للقيم، هذا بالإضافة إلى أنه تسهل معالجته رياضياً، وأنه يدخل في تكوين عدد من المقاييس والاختبارات الإحصائية المهمة.

والفكرة الأساسية للتباين هي حساب إنحرافات جميع القيم عن وسطها الحسابي (أي حساب الفرق بين كل قيمة والوسط الحسابي)، وسوف نجد أن بعض القيم أكبر من الوسط فتكون الفروق (أو الإنحرافات) بالموجب، والبعض الأخر أصغر من الوسط فتكون الفروق (أو الإنحرافات) بالسالب. ودائماً يكون مجموع هذه الإنحرافات مساوياً للصفر. ويكون الحل هنا إما إهمال الإشارات السالبة أو تربيع هذه الإنحرافات. وإهمال الإشارات السالبة ليس له مبرر رياضي، فيكون الحل هو تربيع هذه الإنحرافات، ثم نحسب متوسط الانحرافات المربعة فنحصل على التباين. أي أن التباين يعرف كما يلي:

التباين : هو متوسط مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي. والمثال التالي يوضح كيفية حساب التباين.

مثال (٣) :

أحسب تباين دخول الشريحية الاجتماعية التالية : مثال رقم (١) :

70 75 71 75 74 76 76 78

الحل :

١ – نحسب أولاً الوسط الحسابي للدخول كما يلي :

$$\overline{X} = \frac{592}{8} = 74$$

٢ – نحسب إنحرافات القيم عن الوسط الحسابي (أي الفروق بينها وبين الوسط الحسابي) كما يلي :

$$-4 , +1 , -3 , +1 , 0 , +2 , -1 , +4$$

(لاحظ أن مجموع الانحرافات يساوي صفر)

٣ – نربع هذه الانحرافات كما يلي :

16 1 9 1 0 4 1 16

٤ – التباين يساوي متوسط هذه المربعات، أي يساوي :

$$\frac{16+1+9+1+0+4+1+16}{8}=\frac{48}{8}=6$$

٤,٥ الإنحراف المعياري : Standard Deviation :

نلاحظ أن تمييز التباين سيكون " دخول مربعة " وبصفة عامة " وحدات مربعة " لأنه يتم تربيع الانحرافات (أو الفروق). لذلك فإنه يؤخذ الجذر التربيعي الموجب للتباين فنحصل على ما يسمى " الإنحراف المعياري " والذي سيكون تمييزه هو نفس الوحدات. ففي هذا المثال يكون الانحراف المعياري للدخول هو :

$\sqrt{6}=2.449$ دولاراً

والانحراف المعياري – عادة – يستخدم بدلاً من التباين كأهم مقياس للتشتت. فالتباين ما هو إلا مربع الانحراف المعياري، والانحراف المعياري ما هو إلا الجذر التربيعي الموجب للتباين.

تعريف الانحراف المعياري : الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم عن وسطها السحابي. أي هو الجذر التربيعي الموجب للتباين. وعادة يرمز للانحراف المعياري للعينة بالرمز S ولتباين العينة بالرمز S^2 وللانحراف المعياري للمجتمع بالرمز اللاتيني σ (سيجما) ولتباين المجتمع بالرمز σ^2.

ويمكن التعبير عن كل من التابين والانحراف المعياري بالرموز كما يلي :

إذا فرضنا أن قيم العينة هي :

$X_1 , X_2 , \dots , X_n$ (أي عددها n) فإن الخطوات تكون كما يلي :

١ – حساب الوسط الحسابي أي حساب $\overline{X}$ حيث :

$$\overline{X}=\frac{\sum x}{n}$$

٢ – حساب إنحرافات القيم عن الوسط الحسابي، أي :

$$X_1-\overline{X}, X_2-\overline{X}, \dots, X_n-\overline{X}$$

٣ – تربيع هذه الانحرافات، أي :

$$(X_1-\overline{X})^2, (X_2-\overline{X})^2, \dots, (X_n-\overline{X})^2$$

٤ – التباين هو الوسط الحسابي لهذه المربعات، أي :

$$S^2=\frac{(X_1-\overline{X})^2+,(X_2-\overline{X})^2,+\dots+,(X_n-\overline{X})^2}{n}$$

والتي يمكن كتابته (بإختصار البسط) كما يلي :

تباين العينة

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_I-\overline{X})^2}{n}$$

٥ – الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، أي :

الانحراف المعياري للعينة $S = \sqrt{\frac{\sum (X_I - \overline{X})^2}{n}}$

وبالطريقة نفسها إذا كانت لدينا قيم المجتمع الإحصائي. فإذا كانت قيم المجتمع هي : $X_1 , X_2 , \dots , X_N$ أي عددها N فإن قانوني التباين والانحراف المعياري للمجتمع – بافتراض أن الوسط الحسابي للمجتمع هو μ (ميو) – يمكن كتابتها كما يلي: $\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{N}$

تباين المجتمع

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{N}}$$

الانحراف المعياري للمجتمع

ملاحظة مهمة :

يمكن حساب كل من التباين والانحراف المعياري بطريقة مختصرة – وتعطي النتائج نفسها بطبيعة الحال – كما يلي :

* تباين العينة بالطريقة المختصرة :

$$S^2 = \frac{\sum x^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2$$

* الانحراف المعياري للعينة بالطريقة المختصرة :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2}$$

وفي الطريقة المختصرة فإن كل المطلوب معرفته لحساب التباين أو الإنحراف المعياري هو $\sum x$ (أي مجموع القيم)، $\sum x^2$ (أي مجموع مربعات القيم) ثم التعويض في القانون.

مثال (٤) :

أحسب التباين والإنحراف المعياري بالطريقة المختصرة لبيانات المثال رقم (٣).

الحل :

يمكن تنظيم الحل في الجدول التالي :

X	X^2
70	4900
75	5625
71	5041
75	5625

74	5476
76	5776
73	5329
78	6084
$\sum x = 592$	$\sum x^2 = 43856$

ويكون التباين (حيث n = 8) هو :

$$S^2 = \frac{\sum x^2}{n} = (\frac{\sum x}{n})^2$$
$$= \frac{43856}{8} = \left(\frac{592}{8}\right)^2$$
$$= 5482 - 5476$$
$$S^2 = 6$$

وبالتالي فإن الإنحراف المعياري هو : $S = \sqrt{6} = 2.449$ وهي النتائج نفسها التي حصلنا عليها سابقاً ولكن بطريقة أبسط.

بعض خصائص الإنحراف المعياري :

١ – قيمة الانحراف المعياري دائماً موجبة أو أكبر من أو تساوي صفر. فأقل قيمة تساوي الصفر (وذلك عندما تكون جميع القيم متساوية، وفي هذه الحالة لا توجد فروق أو إنحرافات بينها وبين الوسط الحسابي وبالتالي لا يوجد أي تشتت بين القيم، وبالتالي فإن قيمة الإنحراف المعياري في حالة تساوي جميع القيم تساوي الصفر).

٢ – كلما كان التشتت كبيراً حول الوسط كلما كان الانحراف المعياري كبيراً، والعكس صحيح.

٣ – إذا أضفنا وطرحنا مقداراً ثابتاً من كل القيم فإن قيمة الانحراف المعياري (أو التباين) لا تتغير (أيلا تتأثر قيمة الانحراف المعياري بالطرح أو الجمع). ولتوضيح هذه الخاصية نأخذ المثال التالي :

مثال (٥) :

حل المثال السابق رقم ٤ بعد طرح 70 (على سبيل المثال من كل القيم لاحظ أن هذا سوف يسهل الحسابات).

القيمة بعد طرح (70)	المربعات (بعد الطرح)
X	X^2
0	0
5	25
1	1
5	25

4	16
6	36
3	9
8	64
$\Sigma X = 176$	$\Sigma X^2 = 176$

ويكون التباين

$$S^2 = \frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2$$

$$= \frac{176}{8} - \left(\frac{32}{8}\right)^2$$

$$= 22\text{-}16$$

$$= 6$$

والانحراف المعياري $S = \sqrt{6} = 2.449$ وهي النتائج نفسها مع ملاحظة أن العمليات الحسابية أسهل في هذه الحالة. وتجدر الإشارة إلى أنه لو طرحنا أي قيمة أخرى سنحصل على النتائج نفسها.

٤- إذا ضربنا كل قيمة في مقدار ثابت ثم حسبنا الانحراف المعياري للقيم الجديدة فإنه يجب القسمة على هذا المقدار الثابت. وإذا قسمنا كل قيمة على مقدار ثابت ثم حسبنا الانحراف المعياري للقيم الجديدة فإنه يجب الضرب في هذا المقدار الثابت.

٥,٥ معامل الاختلاف : The Coefficien of Variation

لمقارنة تشتت مجموعتين (أو أكثر) من البيانات وكانت البيانات تختلف في مستواها العام (أي في أوساطها الحسابية) و / أو تختلف في وحدات القياس (مثلاً مقارنة بيانات الدخل حيث تقاس بالريال ببيانات العمر حيث تقاس بالسنوات) فإن المقارنة لا تتم مباشرة بمقارنة الانحراف المعياري لكل منهما بل تتم من خلال مقياس آخر هو "معامل الاختلاف" أو ما يسمى أحياناً مقياس التشتت النسبي حيث ينسب الانحراف المعياري لكل مجموعة إلى وسطها الحسابي والضرب في 100 فنحصل على مقياس نسبي أو مئوي (وبدون تمييز) أي تتم المقارنة بحساب معامل الاختلاف لكل منهما، والمجموعة التي لها معامل اختلاف أكبر تكون أكبر تشتتاً والعكس صحيح أي أن :

وإذا رمزنا لمعامل الاختلاف بالرمز C. V فإن :

$$C.V = \frac{S}{\overline{X}} \times 100$$

مثال (٦) إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدخول عينة من الناخبين بالريالات هو : $\overline{X}_1 = 1500, S_1 = 152$

الانحراف المعياري
الوسط الحسابي

وكان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأعمارهم (بالسنوات) هو :

$$\bar{X}_2 = 42, S_2 = 9.2$$

فأيهما أكثر تشتتاً الدخل أم العمر ؟

الحل :

لمقارنة التشتت نحسب معامل الاختلاف لكل من الدخل والعمر كما يلي :

١- معامل اختلاف الدخل : $c.v_1 = \frac{S_1}{\bar{x}_1} \times 100 = \frac{152}{1500} \times 100 = 10.13\%$

٢- معامل اختلاف العمر : $c.v_2 = \frac{S_2}{\bar{x}_2} \times 100 = \frac{9.2}{42} \times 100 = 21.9\%$

٣- بما أن معامل اختلاف العمر أكبر من معامل اختلاف الدخل فإن بيانات العمر تكون أكثر تشتتا من بيانات الدخل.

حساب التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة :

إذا كانت البيانات مبوبة على شكل قيم وتكرارات، فإن التباين والانحراف المعياري بالطريقة المختصرة يمكن حسابهما كما يلي :

التباين في حالة البيانات المبوبة : $S^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2$

الانحراف المعياري للبيانات المبوبة $S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2}$

حيث X تمثل القيم، f تمثل التكرارات. وإذا كانت البيانات على شكل فئات تحسب مراكز هذه الفئات ويرمز لها بالرمز X، ويتم حساب $\sum Xf$ ، $\sum X^2 f$

مثال (٧) : الجدول التالي يمثل توزيع مجموعة من الناخبين حسب أعمارهم وفي وقت معين، والمطلوب حساب الانحراف المعياري لأعمار الناخبين ؟

الأعمار X	عدد الناخبين f
20	3
25	4

30	5
35	2
المجموع	14

الحل :

ينظم الحل كما في الجدول التالي حيث يتم حساب كل من Xf، X^2f للحصول على ΣXf ، $\Sigma X^2 f$

الأعمار X	أعداد الناخبين f	حاصل ضرب Xf	حاصل ضرب X^2f
20	3	60	1200
25	4	100	2500
30	5	150	4500
35	2	70	2450
المجموع	$\Sigma f = 14$	$\Sigma xf = 380$	$\Sigma x^2f = 10650$

ويحسب الانحراف المعياري باستخدام الصيغة التالية :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{10650}{14} - \left(\frac{380}{14}\right)^2}$$

$$= \sqrt{760.7 - 736.6}$$

$$= \sqrt{24.1} = 4.9$$

أي أن الانحراف المعياري لأعمار الناخبين يساوي ٤,٩ سنة.

مثال (٨) شامل على التشتت :

البيانات في الجدول الخاص بالمثال الشامل رقم (٦) على المتوسطات التي تمثل أهم الحروب التي شهدها العالم خلال الفترة من عام 1945، وحتى عام 1980م. احسب المدى، الانحراف المعياري، ومعامل الاختلاف لعدد الحروب خلال الفترة ؟

الحل :

يمكن تلخيص بيانات الجدول رقم (١) في الجدول التالي :

الحروب X	التكرارات f
0	4
1	8
2	7
3	9
4	6
6	2
المجموع	36

والجدول يوضح أن هناك أربع سنوات لم تحدث فيها حروب، وثمان سنوات حدثت في كل منها حرب واحدة، وسبع سنوات حدثت في كل منها حربان، وهكذا....

٤ـ الاختبار البعدي:

سيتم لاحقًا.

المصادر:

١. "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الحادية عشرة لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص و ما دار سابقًا.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التفاضل "

نظرية المشتقات (تفاضل الدالة بالطريقة المختصرة):

١. مشتقة المقدار الثابت = صفر

$$y = c, \frac{dy}{dx} = y' = 0$$

٢. مشتقة المتغير المطلق الأسي تساوي (الأس مضروب في المتغير المطلق الأسي مرفوع لأس أقل من الأس الأصلي بمقدار ١.

$$y = x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = n.x^{n-1}$$

٣. مشتقة حاصل ضرب مقدار ثابت في دالة معينة تساوي (حاصل ضرب هذا المقدار الثابت في مشتقة الدالة).

$$y = c.f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = c.f'(x)$$

٤. مشتقة حاصل ضرب دالتين تساوي (الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى).

$$y = u.z$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = u.z' + z.u'$$

٥. مشتقة حاصل قسمة دالتين تساوي $\frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$

$$y = \frac{u}{z}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{z.u' - u.z'}{z^2}$$

ملاحظة:

لإيجاد مشتقات من الرتب العالية كأن تكون الثانية فهي مشتقة المشتقة الأولى و الثالثة مشتقة المشتقة الثانية و هكذا.....

واجب بيتي

جد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية و بأبسط صورة ؟:

* $y = \frac{2+x}{2x-1}$ * $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ * $y = \sqrt{x^2+1}$

* $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ * $y = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$ * $y = \sqrt{2x}$

* $y = x^2\sqrt{x^3+1}$ * $y = \left(x^3+3x^2+5\right)^2$ * $y = \frac{x^3-2}{\sqrt{x}}$

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

سيتم لاحقًا.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الحادية و العشرون لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أ- الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص و ما دار سابقًا.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

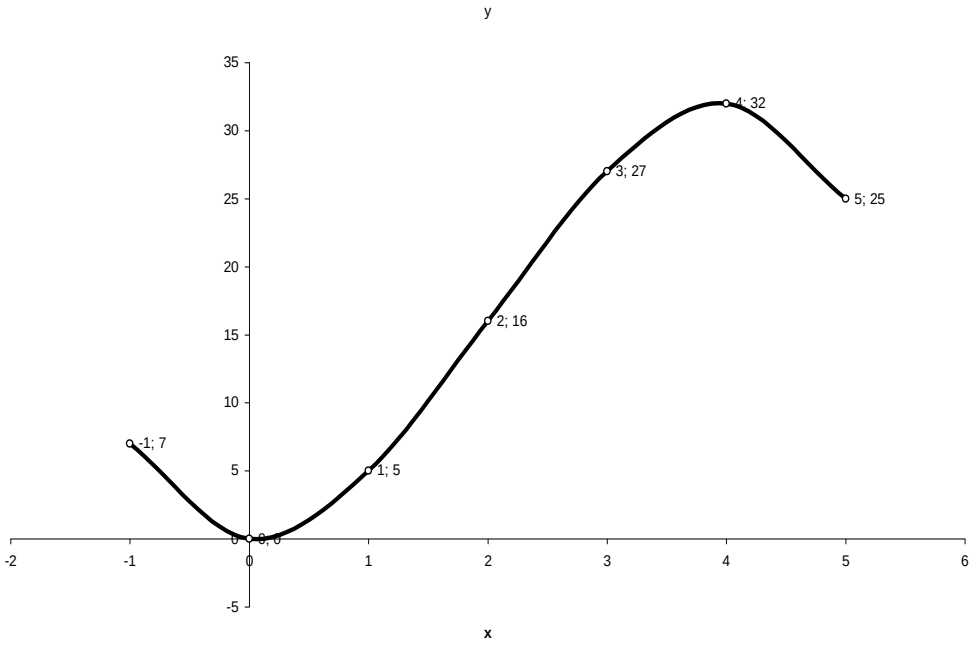
" التفاضل "

مثال: أرسم منحني الدالة ($y = 6x^2 - x^3$) مبينًا نقاط الدوران و الانقلاب فيها إن وجدت و مستعينًا بجدول البيانات؟

الحل:

$$y = 6x^2 - x^3$$
$$0 = x^2(6 - x)$$
$$x^2 = 0 \ldots\ldots\ldots x = 0$$
$$6 - x = 0$$
$$x = 6$$
$$(0,0) \ldots\ldots\ldots (0,6)$$
$$y = 0 - 0 = 0$$
$$(0,0)$$
$$y' = 12x - 3x^2$$
$$12x - 3x^2 = 0$$
$$3x(4 - x) = 0$$
$$3x = 0 \ldots\ldots\ldots; x = 0$$
$$4 - x = 0 \ldots\ldots; x = 4$$
$$y = 0 - 0 = 0$$
$$y = 6(4)^2 - 4^3 = 96 - 64 = 32$$
$$(0,0) \ldots . (4,32)$$
$$y'' = 12 - 6x$$
$$12 - 6x = 0 \ldots\ldots\ldots; x = 2$$
$$y = 6(2)^2 - 2^3 = 24 - 8 = 16$$
$$(2,16)$$

x	$y= 6x^2-x^3$	$y'= 12x-3x^2$	$y''= 12-6x$	الملاحظات
-1	7	-15	+18	المنحني هابط لأن ميله سالب و شكله مقعر
0	٠	٠	+12	نقطة نهاية صغرى لأن ميل المنحني صفر و شكله مقعر
١	٥	+9	+6	المنحني صاعد لأن ميله موجب و شكله مقعر
٢	١٦	+12	0	نقطة انقلاب لأن المشتقة الثانية للمنحني صفر و شكله مقعر
٣	٢٧	+9	-6	المنحني صاعد لأن ميله موجب و شكله محدب
٤	٣٢	٠	-12	نقطة نهاية عظمى لأن ميل المنحني صفر و شكله محدب
٥	٢٥	-15	-18	المنحني هابط لأن ميله سالب و شكله محدب



واجب بيتي

أرسم منحني الدوال الآتية مبينًا نقاط الدوران و الانقلاب فيها إن وجدت و مستعينًا بجدول البيانات؟:

$y = x^3$ * $y = 4x - x^2$ * $y = (x+1)(x-2)$ * $y = x^2 - 2x - 3$ * $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ *

مثال: جد معادلة المستقيم المماس و العمود على المماس للمنحني $(y = 3x^2 + 1)$ عند النقطة $(1,2)$؟

الحل:

$$y' = 6x = 6 \times 1 = 6$$

$$y' = m = 6$$

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$6(x - 1) = y - 2$$

$$\therefore 6x - y - 4 = 0$$

$$m_v = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{6}(x - 1) = y - 2$$

$$-x + 1 = 6y - 12$$

$$x + 6y - 13 = 0$$

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

س١/: جد قيمة الثابت c في معادلة المنحني $(y = x^2 + c)$ كي يمس المستقيم $(y = x)$؟.

س٢/: جد قيم الثوابت (c,b,a) في معادلة المنحني $(y = ax^2 + bx + c)$ المار بالنقطة $(1,2)$ و الذي يمس المستقيم $(x - y = 0)$ في نقطة الأصل؟.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الأسبوعية الخامسة لمادة الرياضيات التطبيقية:

" المحددات أو المصفوفات "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١ـ النظرة الشاملة:

أ- الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على المحددات و خواصها و حل المعادلات الخطية.

ثانياً: أتقان و فهم المحددات و خواصها و حل المعادلات الخطية.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. حل المعادلات الخطية.
٢. الاستفادة من المحددات في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف المحددات و خواصها.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" المحددات أو المصفوفات "

تعريف المحدد:

هو مجموعة أعداد حقيقية تكتب على شكل صفوف (Raw) أو أعمدة (Column) محصورة بين قوسين كبيرين أو مستقيمين عمودين.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

يسمى المحدد ثنائياً إذا كان عبارة عن عمودين و صفين و ثلاثياً إذا كانت فيه ثلاثة أعمدة و ثلاثة صفوف و هكذا .....

إيجاد مفكوك المحدد:

١. إذا كان ثنائياً: المفكوك عبارة عن حاصل ضرب قطريه (السهم نحو اليمين + و السهم نحو اليسار -):

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$[A] = +(a_1.b_2) - (b_1.a_2)$$

٢. إذا كان ثلاثياً: فهناك طريقتان لإيجاد المفكوك:

أ- طريقة الإضافة، و فيها تتم إضافة العمودين الأول و الثاني على يمين المحدد و المفكوك هو المجموع الجبري لحاصل ضرب الأسهم (الأسهم نحو اليمين + و نحو اليسار -) مثل:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A] = +(1\times4\times7 + 2\times5\times2 + 2\times5\times0) - (3\times4\times2 + 1\times5\times0 + 2\times6\times7)$$
$$[A] = +(28 + 20 + 0) - (24 + 0 + 84)$$
$$[A] = +48 - 24 - 84 = -60$$

ب- طريقة التجزئة، و فيها نختار أي صف أو عمود (و يفضل الذي فيه صفر إن وجد) و نجعل عناصر ذلك الصف أو العمود عوامل لمحددات ثنائية عنصر كلٍّ منها خالية من عناصر الصف أو العمود المختار و الذي يضمه عامله، و هنا يجب مراعاة قاعدة الإشارات الآتية لغرض إعطاء عناصر الصف أو العمود المختار الإشارة اللازمة:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

مثل: حل المثال السابق بطريقة التجزئة
نختار الصف الثالث مع مراعاة قاعدة الإشارات:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$
$$[A] = +2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$
$$[A] = +2(10-12) - 0 + 7(4-12)$$
$$[A] = -4 - 56 = -60$$

مثال:
جد قيمة X في المحدد الثلاثي الآتي كي يكون مفكوكه = 64 ؟

$$[A] = \begin{bmatrix} X & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 64$$

الحل:
نختار طريقة التجزئة و (أختيار الصف الأول):

$$[A] = +X\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = 64$$
$$+ X(4-1) - 2(-10-4) + 3(5+8) = 64$$
$$3X + 28 + 39 = 64$$
$$3X = 64 - 28 - 39 = -3$$
$$\therefore X = \frac{-3}{3} = -1$$

ملاحظة:
يمكن إيجاد مفكوك المحددات التي أكثر من الثلاثي بالطريقتين السابقتين و لكن بعد تحويلها إلى محدد ثلاثي اعتماداً على خواص المحددات كما سيرد شرحه.

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

سيتم بعد نهاية الموضوع.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الخامسة و العشرون لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التكامل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التكامل و أنواعه و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التكامل و أنواعه و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد التكامل و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التكامل و أنواعه في التطبيقات العملية المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التكامل و أنواعه و الفائدة منه في مجال الأختصاص.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التكامل "

الصيغ القياسية لتكامل الدوال المتسامية:

من المهم الرجوع إلى العلاقات المثلثية التي سبق ذكرها لغرض الاستفادة منها في هذا الموضوع و منها مثلاً:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

و كذلك موضوع تفاضل الدوال المتسامية، أما صيغ التكامل فهي:

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x \cdot dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x \cdot dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \cdot \tan x = \sec x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = -\cos^{-1} x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = -\cot^{-1} x + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = -\csc^{-1} x + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\int e^x \cdot dx = e^x + c$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

ملاحظة:
إذا كانت الدالة المتسامية مرفوعة لأس معين أو داخل جذر أو قوس تجب ملاحظة توفر مشتقة داخل الجذر أو القوس قبل إجراء التكامل.

- جد تكامل ما يأتي و بأبسط صورة:

$$\int \cos(3\theta - 1)d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int \cos(3\theta - 1)3d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\sin(3\theta - 1) + c$$

.....

$$\int \frac{\sin 2t.dt}{\sqrt{2 - \cos 2t}}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2t.2dt}{\sqrt{2 - \cos 2t}}$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2 - \cos 2t}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= \sqrt{2 - \cos 2t} + c$$

.....

$$\int 3\cos\sqrt{x}.\frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$= 3\int \cos\sqrt{x}.\frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$= 3 \times 2\int \cos\sqrt{x}.\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$
$$= 6\sin\sqrt{x} + c$$

$$\int \tan u.du$$

$$= \int \frac{\sin u}{\cos u}.du$$

$$= -\ln \cos + c$$

$$\int \sec x.dx$$

$$= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x).dx}{(\sec x + \tan x)}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x.\tan x}{(\sec x + \tan x)}.dx$$

$$= \ln(\sec x + \tan x) + c$$

.....

$$\int \sec^2 2\theta.d\theta$$

$$\frac{1}{2}\int \sec^2 2\theta.2d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\tan 2\theta + c$$

.....

$$\int (e^x - e^{-x})^2 dx$$

$$= \int (e^{2x} - 2e^x.e^{-x} + e^{-2x}).dx$$

$$= \int (e^{2x} - 2 + e^{-2x}).dx$$

$$= \int e^{2x}.dx - 2\int dx + \int e^{-2x}.dx$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{2x}.2dx - 2\int dx + \frac{1}{2}\int e^{-2x}.-2dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

$$= \frac{(e^{2x} - e^{-2x})}{2} - 2x + c$$

أسئلة عامة على موضوع التكامل مع الأجوبة

$$\int (1-x)\sqrt{x}\,.dx$$

Ans.: $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + c$

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\,.dx$$

Ans.:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{4}{x} + c$$

$$\int \frac{8x^2.dx}{(x^3+2)^3}$$

Ans.: $y = \frac{4}{3(x^3+2)^3} + c$

$$\int dy = \int 3x\sqrt{1-2x^2}\,.dx$$

Ans.:

$$y = -\frac{1}{2}(1-2x^2)^{3/2} + c$$

$$\int dy = \int \frac{x.dx}{x^2-1}$$

Ans.:

$$y = \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + c$$

$$\int dy = \int \frac{x^2.dx}{1-2x^3}$$

Ans.: $y = -\frac{1}{6}\ln(1-2x^3) + c$

$$\int dy = \int \frac{x+2}{x+1}.dx$$

Ans.: $y = x + \ln(x+1) + c$

$$\int dy = \int \frac{e^{1/x}.dx}{x^2}$$

Ans.: $y = -e^{1/x} + c$

$$\int dy = \int \sin 2x.\cos 2x dx$$

Ans.: $y = \frac{1}{4}\sin^2 2x + c$

$$\int dy = \int \sin 2x.dx$$

Ans.: $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$

$$\int dy = \int \cos e^x.e^x dx$$

Ans.: $y = \sin e^x + c$

$$\int dy = \int \tan^2 x.dx$$

Ans.: $y = \tan x - x + c$

$$\int dy = \int (x+1)e^{x^2+2x}.dx$$

Ans.: $y = \frac{1}{2}e^{x^2+2} + c$

$$\int dy = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2}.dx$$

Ans.: $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + c$

$$\int dy = \int \frac{e^x}{1+2e^x}.dx$$

Ans.: $y = \frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + c$

٤- الاختبار البعدي:

س١/: جد تكامل المقدار ($\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$) و بأبسط صورة.

س٢/: جد تكامل المقدار ($\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$) و بأبسط صورة.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الخامسة عشر لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التفاضل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ

٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد المشتقات و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التفاضل و المشتقات في مجال الأختصاص في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التفاضل و المشتقات و التطبيقات العملية عليهما في مجال الأختصاص و ما دار سابقًا.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التفاضل "

مثال: جد مشتقة الدوال الآتية و بأبسط صورة:

$$y = \tan^2(1-x)$$

الحل:

$$u = 1 - x$$

$$\frac{du}{dx} = -1$$

$$y = \tan^2 u$$

$$\frac{dy}{du} = 2\tan u.\sec^2 u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \times \frac{dy}{du}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -2\tan(1-x).\sec^2(1-x)$$

$$y = \sec\sqrt{x.\tan x}$$

الحل:

$$u = \sqrt{x.\tan x}$$

$$y = \sec u$$

$$\frac{dy}{du} = \tan u.\sec u = \tan\sqrt{x.\tan x}.\sec\sqrt{x.\tan x}$$

$$z = x.\tan x$$

$$\frac{dz}{dx} = x.\sec^2 x + \tan x$$

$$u = \sqrt{z} = (z)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{2}(z)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{x.\tan x}}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{x.\sec^2 x + \tan x}{2\sqrt{x.\tan x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan\sqrt{x.\tan x}.\sec\sqrt{x.\tan x} \times \frac{x.\sec^2 x + \tan x}{2\sqrt{x.\tan x}}$$

$$y = \sqrt{\sin x}$$

الحل:

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$y = \sqrt{u}$$

$$\frac{dy}{du}\frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$y = \cos\sqrt{x}$

الحل:

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = \cos u$

$\frac{dy}{du} = -\sin\sqrt{x}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

واجب بيتي

جد مشتقة الدوال الآتية و بأبسط صورة:

$y = \csc\sqrt[3]{x}$ * $y = \frac{1}{4}\sin^4 2x$ * $y = \sin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ * $y = \cot\left(\frac{\sin x}{x^3}\right)$ *

$y = \cos(1-3x^2)$ * $y = \tan(x.\tan x)$ *

٤- الاختبار الذاتي:

أثناء القاء المحاضرة و بشكل شفهي أو على السبورة.

٥- الاختبار البعدي:

جد مشتقة الدوال الآتية و بأبسط صورة:

$y = \frac{1}{4}\sin^4 2x$ ، $y = \cos(1-3x^2)$

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الأسبوعية الرابعة لمادة الرياضيات التطبيقية:

" الأسس و اللوغاريتمات "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

بـ مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

تـ الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على اللوغاريتمات و قوانينها و حل المعادلات اللوغاريتمية.

ثانياً: أتقان و فهم اللوغاريتمات و قوانينها و حل المعادلات اللوغاريتمية.

ثـ أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. حل المعادلات اللوغاريتمية.

٢. الاستفادة من اللوغاريتمات في التطبيقات المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف اللوغاريتمات و قوانينها و التي قد سبق للطالب أن أخذها في المراحل السابقة.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" الأسس و اللوغاريتمات "

تعريف اللوغاريتم:

لوغاريتم أي عدد بالنسبة لأساس معين هو الأس الذي لو رفع إليه الأساس لنتج العدد، أي ان:

$$y = \log_a u$$

$$u = a^y$$

و يستفاد منه في تسهيل العمليات الحسابية المعقدة و هو على نوعين:

١. الأعيادي: أساسه العدد 10 و يستخدم في الجبر و يكتب عادة من دون الأساس مثل ($\log 5$).
٢. الطبيعي: أساسه المقدار الثابت ($e = 2.718$) و يستخدم في التفاضل و بالتكامل و يكتب عادة من دون الأساس و يرمز له بـ (ln) مثل (ln5).

قوانين اللوغاريتمات:

١. لوغاريتم حاصل ضرب مقدارين أو أكثر و لنفس الأساس هو مجموع لوغاريتماتها، مثل:

$$\log_x a.b.c = \log_x a + \log_x b + \log_x c$$

٢. لوغاريتم خارج قسمة مقدارين و لنفس الأساس هو لوغاريتم المقسوم مطروح منه لوغاريتم المقسوم عليه، مثل:

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

٣. لوغاريتم المقدار المرفوع إلى قوة لأساس معين هو تلك القوة مضروبة في لوغاريتم المقدار نفسه و لنفس الأساس، مثل:

$$\log_x a^b = b.\log_x a$$

٤. لوغاريتم العدد (١) و لأي أساس يساوي صفراً، لماذا ؟؟؟

$$\log_x 1 = o$$
$$x^0 = 1$$

٥. لوغاريتم أي مقدار لأساس مساوٍ لذلك المقدار يساوي صفراً، لماذا ؟؟؟

$$\log_5 5 = 1$$
$$5^1 = 5$$

٦. لتغيير أساس لوغاريتم مقدار معين لأساس جديد نضرب اللوغاريتم للأساس القديم في لوغاريتم جديد عدده أساس اللوغاريتم القديم و أساسه الأساس الجديد، أي أن:
إذا كان لدينا $\log_B A$ و نريد أن نغير للأساس C ينتج:

$$\log_C A = \log_B A . \log_C B$$

٧. لا يوجد لوغاريتم لمقدار سالب.

مثال:

جد قيمة $\log_5^{125}$ ، $\log_3^{\frac{1}{27}}$

الحل:

$$u = \log_5^{125}$$
$$5^u = 125$$
$$5^u = 5^3$$
$$\therefore u = 3$$

$$u = \log_3^{\frac{1}{27}}$$
$$3^u = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$$
$$u = -3$$

مثال:

إذا علمت أن $\log 2 = 0.301$ و $\log 3 = 0.477$، جد مايأتي:

$\log 12$ ، $\log 27$

الحل:

$$27 = 3^3$$

$$\log 27 = \log 3^3 = 3\log 3$$

$$\because \log 3 = 0.477$$

$$\therefore \log 27 = 3 \times 0.477 = 1.431$$

$$12 = 3 \times 4$$

$$4 = 2^2$$

$$\log 12 = \log 3 \times 4$$

$$\log 12 = \log 3 + \log 4$$

$$\log 12 = \log 3 + \log 2^2$$

$$\log 12 = \log 3 + 2\log 2$$

$$\therefore \log 12 = 0.477 + (2 \times 0.301) = 1.079$$

مثال:

جد قيمة x من المعادلة اللوغارتمية $\log_5(x-1) + \log_5(x+3) = 1$ ؟

الحل:

$$\log_5(x-1) + \log_5(x+3) = \log_5(x-1)(x+3)$$

$$\therefore \log_5(x-1)(x+3) = 1$$

$$\therefore 5^1 = (x-1)(x+3)$$

$$\therefore 5 = x^2 + 3x - x - 3$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x-2)(x+4) = 0$$

$$x = 2$$

$$x = -4(\otimes)$$

مثال:

جد قيمة x من المعادلة اللوغارتمية $3\log_x 10 + \log x = 4$ ؟

الحل:

$$\log_x x = \log x . \log_x 10$$

$$\therefore 1 = \log x . \log_x 10$$

$$\therefore \log_x 10 = \frac{1}{\log x}$$

$$\therefore 3\left(\frac{1}{\log x}\right) + \log x = 4$$

$$3 + (\log x)^2 = 4\log x$$

$$\therefore (\log x)^2 - 4\log x + 3 = 0$$

$$(\log x - 3)(\log x - 1) = 0$$

$$\log x = 3$$

$$\therefore x = 10^3 = 1000$$

$$\log x = 1$$

$$\therefore x = 10^1 = 10$$

مثال (*:

جد قيمة x من المعادلة $2^x = 5$ ؟

الحل:

$$\log 2^x = \log 5$$

$$x \log 2 = \log 5$$

$$\therefore x = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0.699}{0.301} = 2.322$$

.....

واجب بيتي

س١/: أثبت صحة العلاقة $\frac{x}{1-y^{-x}} + \frac{x}{1-y^{x}} = x$

س٢/: جد قيمة x من المعادلة $4^{4x} - 17(2^{4x}) + 16 = 0$

س٣/: جد قيمة x من المعادلة $\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 2$

س٤/: جد قيمة x من المعادلة $8^{(\frac{x^2}{3} - 2)} = 2^x$

س٥/: جد قيمة x و y من المعادلتين الآنيتين الآتيتين:

$3^x + 2^y = 7$

$3^{x+2} - 2^{y+1} = 19$

س٦/: جد قيمة x من المعادلة $\log_5(3x+7) - \log_5(x-5) = 2$

س٧/: جد قيمة x من المعادلة $4^x = 5$

س٨/: جد قيمة x و y من المعادلتين الآنيتين الآتيتين:

$\log(x-y) = 1$

$\log(3x+4y) = 2$

س٩/: جد قيمة x و y من المعادلتين الآنيتين الآتيتين:

$\log x + \log y = 1$

$\log_{\sqrt{7}}(x+y) = 2$

٤- الاختبار الذاتي:

سيتم اثناء المحاضرة.

٥- الاختبار البعدي:

س١/: جد قيمة x من المعادلة $4^{4x} - 17(2^{4x}) + 16 = 0$

س٢/: جد قيمة x و y من المعادلتين الآنيتين الآتيتين:

$\log x + \log y = 1$

$\log_{\sqrt{7}}(x+y) = 2$

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / العراق
هيئـــــة التعليـم التقنـــي
المعهد التقني / الموصل
قسم تقنيات الموارد المائية

المحاضرة الرابعة و العشرون لمادة الرياضيات التطبيقية:

"التكامل "

لطلبة الصف الأول في القسم

اعداد

المدرس المساعد

أيهم طه الراوي

١٤٣١ هـ ٢٠١٠ م

١ـ النظرة الشاملة:

أـ الفئة المستهدفة:

طلبة الصف الأول في قسم تقنيات الموارد المائية – المعهد التقني / الموصل – هيئة التعليم التقني.

ب- مبررات المحاضرة:-

١. يعد تعليم هذه المحاضرة ركناً أساسياً في دراسة الطلبة.

ت- الفكرة المركزية:-

أولاً: التعرف على التكامل و أنواعه و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ثانياً: أتقان و فهم التكامل و أنواعه و التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

ث- أهداف المحاضرة:-

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المحاضرة قادراً على:

١. ايجاد التكامل و اجراء التطبيقات العملية في مجال الأختصاص.

٢. الاستفادة من التكامل و أنواعه في التطبيقات العملية المختلفة.

٢- الاختبار القبلي:

الطلب من الطلبة شفهيا تعريف التكامل و أنواعه و الفائدة منه في مجال الأختصاص.

ملاحظة:

يتم التحقق من سلامة أجابات الطلبة و من ثم بيان الحاجة للمحاضرة.

٣- عرض المحاضرة:

" التكامل "

يعد التكامل عملية معكوسة للتفاضل، فإذا كانت المشتقة الأولى لدالة معينة معلومة فإنه يمكن إيجاد القيمة الأصلية لتلك الدالة باستعمال " التكامل ". و للتكامل في الوقت الحاضر تطبيقات كثيرة كإيجاد المساحات و الأحجام و مركز ثقل الأجسام ..... إلخ.

التكامل على نوعين:

١. التكامل غير المحدود: هو التكامل الخالي من حدود التكامل و فيه تكون الدالة الأصلية لها حلول عدة، فمثلًا إذا كانت المشتقة الأولى تساوي $2x$ فإن الدالة الأصلية لتلك المشتقة يمكن أن تكون $y = x^2$ أو $y = x^2 + 2$ أو $y = x^2 - 3\pi$ ، و بصورة عامة فإنه يضاف ما يسمى بـ "ثابت التكامل C" لناتج التكامل و كالآتي:

$$\int f(x)dx = f(x) + C$$

٢. التكامل المحدود: هو التكامل الذي يحوي حدود التكامل من أدنى قيمة إلى أعلى قيمة و يخلو حلّه أو ناتجه من ثابت التكامل بحيث يمكن إيجاد قيمة التكامل بالتعويض بأعلى قيمة مطروحة من أقل قيمة و كالآتي:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = f[x]_{x_1}^{x_2} = x_2 - x_1$$

الصيغ القياسية لتكامل الدوال الجبرية:

1. $\int dx = x + c$
2. $\int adx = a\int dx = ax + c$
3. $\int (dx + du) = \int dx + \int du = x + u + c$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ldots\ldots if\,(n \neq -1)$

ملاحظة:

في حال تكامل قوس أو جذر أو أي مقدار مركب يجب أن تكون مشتقة ذلك القوس أو الجذر أو المقدار متوفرة قبل إجراء التكامل.

- جد تكامل ما يأتي و بأبسط صورة:

$* \ \frac{dy}{dx} = x^2 + 1$

الحل:

$$dy = (x^2 + 1)dx = x^2 dx + dx$$

$$\int dy = \int x^2 dx + \int dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + x + c$$

$* \ \frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}.\sqrt{y} = x^{1/2}.y^{1/2}$$

$$\frac{dy}{y^{1/2}} = x^{1/2}.dx$$

$$y^{-1/2}.dy = x^{1/2}.dx$$

$$\int y^{-1/2}.dy = \int x^{1/2}.dx$$

$$\frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$2\sqrt{y} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$* \ dy = (2x + 1)^2 dx$

الحل:

$$\int dy = \int (2x + 1)^2 dx$$

$$\int dy = \frac{1}{2}\int (2x + 1)^2 \, 2dx$$

$$y = \frac{1}{2}.\frac{(2x + 1)^3}{3} + c = \frac{1}{6}(2x + 1)^3 + c$$

أسئلة عامة

س١/ جد تكامل ما يأتي و بأبسط صورة:

a. $\int \frac{1-x^2}{x\sqrt{x}}\,dx$ b. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{2x^2+5}}$ c. $\int \sqrt{2x^2+1}\,xdx$

س٢/ جد معادلة المنحني الذي يكون ميله عند النقطة (1, -1) يساوي $3x^2$ ؟

س٣/ جد العلاقة بين المسافة و الزمن لجسم متحرك إذا علمت أن علاقة السرعة مع الزمن له هي $(V = at)$ حيث a هي ثابت التعجيل؟

٤- الاختبار البعدي:

س١/: جد تكامل المقدار $(\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}})$ و بأبسط صورة.

س٢/: جد تكامل المقدار $(\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y})$ و بأبسط صورة.

المصادر:

١- "الرياضيات التطبيقية" – يعقوب صباغة.