الحقيبة الدراسية

لمادة الرياضيات 1

الفصل الاول

قسم الصناعات الكيمياوية

اعداد كه شين إبراهيم طيب

المعهد التقني كركوك/// قسم الصناعات الكيمياوية

المصادر

. الرياضيلت التطبيقية

2. الرياضيات والتحليل العددي

3. مقدمة في التحليل الرياضي

(المصفوفة)Matrix

هي مجموعة من الاعداد اوكميات حقيقية اودوال مرتبة في صفوف واعمدة وتكون محصورة بين قوسين, للمصفوفة سعة (Size) يمثل عدد الصفوف Ẋ عدد الاعمدة, المصفوفة ذات سعة 2Ẋ 3 اي مكونة من صفين وثلاثة اعمدة , وترمز للمصفوفة بحرف كبير وعناصر المصفوفة بحرف صغير

$$A=[a_{11}\ a_{12}\ \ldots.a_{1n}\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots.a_{2n}\ a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots.a_{mn}]$$

المصفوفة التالية : $A=\begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

ذات سعة (4X3) لانها تتكون من ثلاثة صفوفواربعة اعمدة , والعنصر 3- يقع في الصف الثاني والعمود الرابع..

تعريف : يطلق على المصفوفتين $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ متساويتين A=B اذا وفقط اذا كان من نفس الرتبة (السعة)

مثال C= $\begin{bmatrix} 6 & 5 & \sqrt{3} & \sqrt{36} & 2 & 8 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & 8 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ A= $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

فان $B\neq A$ لانها ليست من نفس الرتبة (السعة) ولكن $B=C$

- انواع المصفوفات

1- المصفوفة العمودية (Column Matrix)

هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد مثلا A [2 3 5]= مصفوفة عمودية ذات سعة 1X4

2- المصفوفة المربعة (Square Matrix)

هي المصفوفة التي تكون فيها عدد الصفوف مساويا لعدد الاعمدة اي (m=n)

مثلا:=A [10 32 13 − 5 11 − 7 8 9]

والعناصر a_{11}, a_{22}, a_{33} تسمى بعناصر القطر الرئيسي

3-المصفوفة الصفية _(Row Matrix)

هي المصفوفة المتكونة من صف واحد A [1 − 6 2]= مصفوفة ذات سعة x14

المصفوفة الصفرية (Zero Matrex)

هي المصفوفة التي تكون جميع العناصر صفرا=A [0 0 0 0 0 0 0 0 0]

4-مصفوفة الوحدة (Identity Matrix)

هي المصفوفة المربعة التي عناصر القطر الرئيسي فيها يساوي واحد=A [1 0 0 0 1 0 0 0 1]

المصفوفة القطرية (Diagonal Matreix)

هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيسي تمثل اعداد وباقي العناصر تمثل صفرا=B [4 0 0 9 0 0 0 2 1]

العمليات الجبرية على المصفوفة

عملية الجمع :المصفوفتان A,B قابلتان للجمع اذا كانتا من نفس السعة (الرتبة) ويكون حاصل جمعهما المصفوفة C من نفس السعة.

A= [1 2 4 0 1 3] و =B [3 2 1 5 6 4]

فان= A+B [1 2 4 0 1 3] [7 7 4 5 5 4]=C = [3 2 1 5 6 4]

عملية الطرح مشابه لعملية الجمع

عملية الضرب

1- عملية الضرب بمقدار قياسي

وذلك بضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك المقدار القياسي .مثلا $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ =A

K*A=$\begin{bmatrix} -12 & -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ وKعددقياسي فان K)) =-2 (K

ضرب المصفوفات :Multiplcation Matrices

المصفوفتان Aو B متوافقتا للضرب اذا كان عدد الاعمدة في المصفوفة الاولى مساويا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية ,نضرب الصف الاول في العمود الاول والثاني والثالث .

$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 11 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ A= و B=$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

A.B=$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 11 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7(5)+4(8) & 7(6)+4(9) & 7(3)+4(2) & 11(5)+ \\ 5(8) & 11(6)+5(9) & 11(3)+5(2) & 9(5)+8(8) & 9(6)+8(9) & 9(3)+8(2) \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 67 & 78 & 29 & 95 & 111 & 43 & 109 & 126 & 43 \end{bmatrix}$=

الاسئلة :-

في المصفوفات التالية اوجد:-

A+B 2-B-A 3- B^2 4- K*A+B -1

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 5 & 3 & 6 & 0 & 2 & 11 & 1 \end{bmatrix}$ A=

المحددات : (Determinants)

يوجد لكل مصفوفة مربعة عدد معين يسمى محدد المصفوفة وبذلك فان هنالك دالة من مجموعة المصفوفات المربعة الى مجموعة الاعداد الحقيقية على افتراض ان عناصر المصفوفة اعداد حقيقية .

$D:A \rightarrow R$

حيث ان Dدالة المحددات و Aمجموعة المصفوفات المربعة و R مجموعة الاعداد الحقيقية

وترمز للمحددات داخل مستقيمين شاقوليين $|A|$ وتكون عدد الصفوف مساويا لعدد الاعمدة

*لايجاد قيمة المحدد من الدرجة الثانية اوالملاتبة الثانية اي التي تتكون من صفين وعمودين نضرب عناصر نهايات الاقطار ببعضها ونجد الفرق بينهما .

A= $[a\ b\ c\ d]$ $|A| = a * d - b * c$

مثال : اوجد محددة المصفوفة $|A|$

A=$[2\ 5\ 1\ 4]$ $|A| = 2 * 4 - 1 * 5 = 3$

المحدد الثلاثي The Determinant of Three

الصيغة العامة للمحدد من الدرجة الثالثة هي $|A| = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}]$

1- نضع العمودين الاول والثاني الى يمين المحدد
2- ناخذ الصف الاول ونضرب كل عنصر من عناصره في العنصرين الواقعين معه على نفس القطر ثم نجمع حواصل الضرب.
3- ناخذ عناصر الصف الثالث من المحدد ونضرب كل عنصر من عناصره في العنصرين الواقعين معه على نفس القطر ثم نطرح حواصل الضرب.
4- نطرح ناتج الخطوة 3 من الخطوة 2 ونحصل على قيمة المحدد.

مثال :اوجد قيمة المحدد التالي $|A| = [0\ 1\ -2\ 5\ 3\ 1\ 2\ -1\ 3]$

$|A|$=[0 1 −2 5 3 1 2 −1 3]0 1 5 3 2 −1

$|A| = 0 * 3 * 3 + 1 * 1 * 2 + (-2) * 5 * (-1) - 2 * 3 * (-2) - (-1) * 1 * 0 - 3 * 5 * 1 = 9$

فك المحددات بواسطة العوامل المتممة :Expanding Determinant by the Cofactors

وهي طريقة عامة لايجاد قيمة اي محدد من اي رتبة .

يعرف العامل المتمم للعنصر a_{ij} بانه حاصل ضرب $(-1)^{i+j}$ في محدد a_{ij} اي ان

$$\text{Cofactor} = (-1)^{i+j}$$

ولايجاد قيمة المحدد بهذه الطريقة :- نختار اي صف او عمود ثم نضرب كل عنصر من عناصرها في عاملها المتمم ونجد المجموع والتي هي قيمة المحدد.

يفضل اختيار الصف او العمود التي يكون فيها عدد الاصفار اكبر ما يمكن ان وجد.

مثال A= $[0\ 1\ -2\ 5\ 3\ 1\ 2\ -1\ 3]$

$$|A| = 0|1\ -2\ 3\ 1| - 5|1\ -2\ -1\ 3| + (-2)|1\ -2\ 3\ 1| = 9$$

الاسئلة : اوجد محددة كل من المصفوفات التالية

$A = [4\ 5\ -3\ 2]$ B=$[1\ 0\ 3\ 2\ 0\ 5\ 3\ 0\ 6]$ C=$[-6\ 4\ 3\ 2\ 0\ 3\ 5\ -1\ 2]$

D=$[-5\ 0\ -1\ -4\ 2\ 1\ 0\ 3\ -4]$ E=$[2\ 3\ 4\ 5\ -1\ 6\ 3\ -6\ 7]$

..... حل المعادلات الخطية -- طريقة كرايمرGramers Rule

لنفرض ان (Ai) اذ ان (i= 1, 2, 3, ….,n) مصفوفة نحصل عليها من ابدال العمود (i) بعمود الثوابت b_1 في الطرف الايمن لمجموعة المعادلات , واذا كانت $|A| \neq 0$ فان للمجموعة AX=B حل فريد هو $X_1=\frac{|A_1|}{|A|}$

$X_2=\frac{|A_2|}{|A|}$ $X_3=\frac{|A_3|}{|A|}$

مثال : حل المنظومة الاتية بطريقة كرايمر

X+Y+Z=2

2X-Y+Z=0

X+2Y-Z=4

D=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $|D| = 7$

X=$\frac{|D_X|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{6}{7}$

Y=$\frac{|D_y|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{10}{7}$

Z=$\frac{|D_z|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{7}$=$\frac{-2}{7}$

التحقق: $\frac{6}{7} + \frac{10}{7} - \frac{2}{7} = 2$

$$2\frac{6}{7} - \frac{10}{7} - \frac{2}{7} = 0$$

$$\frac{6}{7} + 2\frac{10}{7} - \frac{2}{7} = 4$$

الاسئلة: اوجدقيمة X,Y ,Z في كل من المعادلات التالية مع التحقيق.

=3 2X+Y-Z	2X+Y+Z=2
X+2Y+Z=4	2Y+Z=-4
X-Y+Z=7	2Y+3Z=0

المتجهات:-

كثير من الكميات الفيزياوية كالطول والمساحة والكتل وغيرها تتحدد كليا بذكر عدد يدل على مقدارها بينما لاتتحدد بعض الكميات الاخرى الابمعرفة مقدارها نالاضافة الى اتجاههاكالسرعة والقوة والازاحة وغيرها وتسمى كميات متجهة..

المتجه :- كمية لها مقدار واتجاع ويرمز له↔و لطوله بالرمز$\|A\|$ هنالك نوعان من المتجهات

1- متجه مقيد قياسي : له زوج مرتب واحد(x,y) ويبدا من نقطة الاصل

2-متجه غير مقيد :- له زوجان مرتبان من العناصر (x_1,y_1) و (x_2,y_2) لايبدا من نقطة الاصل :

انواع المتجهات :

1-متجه عمودي: مجموعة من الاعداد مرتبة في عمود واحد

2-متجه صفي : مجموعة من الاعداد مرتبة في صف واحد

قانون ايجاد طول المتجه=$\|A^{\rightarrow}\|$ $\sqrt{x^2+y^2}$

قانون ايجاد اتجاه المتجه $cos\ cos\ \varphi = \frac{X}{\|A\|}$ $sin\ sin\ \varphi = \frac{y}{\|A\|}$

.مثال جد طول واتجاه المتجه (3,3) مع الرسم

$\|A^{\rightarrow}\| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\ \sqrt{2}$ $\|A^{\rightarrow}\| = \sqrt{x^2+y^2}$=

$$sin\ sin\ \varphi = \frac{y}{\|A\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos\ cos\ \varphi = \frac{X}{\|A\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = 45^0$$

: سؤال : جد طول واتجاه المتجهات التالية

,2 B=-2,2 A= 1,$\sqrt{3}$ C=-2$\sqrt{3}$,2

جمع المتجهات : يجب ان يكون المتجهين من نفس الرتبه.

مثال اوجد مجموع المتجهين B (0 1- 6 2)=A=(6 1 4 2)

A+B= (2+6 6+1 -1+4 0+2)= (8 7 3 2)

ضرب المتجهات

1- الضرب الكمي:

مثال اذا كان V_3=[7 -18 3] , V_2= [5 2 -1] , V_1= [-4 11 0]

وان K_1=4 و K_2=3 و K_3=7 اوجد:

آ-التركيب الخطي التالي $K_1V_1+K_2V_2+K_3V_3$

ب – $K_2(V_1+V_2)$

الجواب : آ V= 4(-4 11 0)+ 3(5 2 -1)+ 7(7 -18 3)

V=(48 -95 18)

2- الضرب القياسي Dotscalar Produkt

مثال جد. $A^{\rightarrow}$ $B^{\rightarrow}$ اذاكان=[1 -2 -2] $A^{\rightarrow}$ و [6 3 -2]=$B^{\rightarrow}$

. $A^{\rightarrow}$=Î-2ĵ-2Ǩ

$B^{\rightarrow}$ =6Î+3ĵ-2Ǩ

=1*6+(-2)*3+(-2)(-2)=4 $B^{\rightarrow}$ . .$A^{\rightarrow}$

ملاحظة:- اذاكانت تعامد متجهان فان0 = . $B^{\rightarrow}$ $A^{\rightarrow}$.

مثال : اثبت ان المتجهين $A^{\rightarrow}$ و.$B^{\rightarrow}$ متعامدين

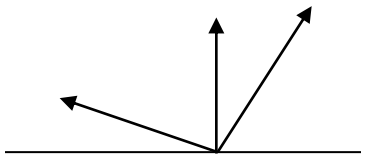
-2ĵ+5ǨÎ3=$A^{\rightarrow}$ 6Î+3ĵ-2Ǩ=$B^{\rightarrow}$

=$B^{\rightarrow}$ $A^{\rightarrow}$ 0=18-8-10

الضرب الاتجاهي : vector product

$\|B^{\rightarrow}\| \ sin\, sin\, \varphi \ . \|A^{\rightarrow}\|$ n= $B^{\rightarrow\ x}.A^{\rightarrow}$

مثال :ماهي محصلة القوتين في الشكل التالي وما هي اتجاهها F_2= 30n F_1=60n



N $\sqrt{3}$30 = 60x$\frac{\sqrt{3}}{2}$= ($F_1X=F_1(cos\ cos\ 30$

$F_1Y= F_1(sin\ sin\ 30)$ n30 ==60x$\frac{1}{2}$

$F_2X=F_2(-cos\ cos\ 60) = 30x\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -15\sqrt{3}n$

$F_2Y=F_2(sin\ sin\ 60) = 30x\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 15\sqrt{3}n$

$RX=\sum_I^2 \quad = Fiy = 30\sqrt{3} + 15\sqrt{3}$

$Ry=\sum_I^2 \quad = Fiy = 30 + 15\sqrt{3}$

$_2R=\sqrt{RX^2 + RY^2 = \sqrt{(30\sqrt{3} - 15)^2 + (30 + 15\sqrt{3})}}$

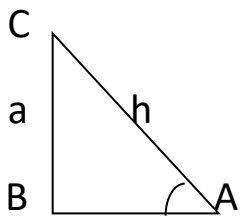
$\sqrt{4500}=\frac{Ry}{RX}=tan\ tan\ \varphi$

الدوال Functions :

لتكن fعلاقة من مجموعة A غير الخالية الى المجموعة B فبقال ان f دالة من A الى B اذا اقترن مع A عنصر وحيد في f A $f \rightarrow$ B : A→B B : B

اذا كانت : f A→B فتسمى المجموعة A منطلق (Domain) الدالة fكما تسمى المجموعة B مستقر (Co domain) الدالة f , ويطلق على المجموعة التي تتكون من صورة كل عنصر من عناصر المجموعة A بفعل f مدى (Range) الدالة ويرمز له ب $f(A)=\{f(a):a€A\}$

الدالة المثلثية:اذا كان لدينا مثلث قائم ABC تعرف الدوال المثلثية للزاوية الحادةθ على النحو التالي



$sin\ sin\ \theta$ = النسبة بين الضلع المقابل للزاوية والوتر

$cos\ cos\ \theta$ = النسبة بين الضلع المجاور للزاوية والوتر

$tan\ tan\ \theta$ = النسبة بين الضلع المقابل للزاوية و الضلع المجاور لها او بانها حاصل قسمة $sin\ sin\ \theta$ على $cos\ cos\ \theta$

$cot\ cot\ \theta$ = النسبة بين الضلع المجاور للزاوية و الضلع المقابل لها او بانها حاصل قسمة $cos\ cos\ \theta$ على $sin\ sin\ \theta$

$sec\ sec\ \theta =$ النسبة بين الوتر والضلع المقابل للزاوية مقلوب $cos\ cos\ \theta$

$csc\ csc\ \theta$ = النسبة بين الوتر والضلع المجاور للزاوية مقلوب $sin\ sin\ \theta$

$sin\ sin\ \frac{a}{h}$ $cos\ cos\ \frac{b}{h}$ $tan\ tan\ \frac{a}{b}$ $cot\ cot\ \frac{b}{a}$ $sec\ sec\ \frac{h}{b}$ $csc\ csc\ \frac{h}{a}$

المتطابقات الاساسية

$Sin^2x+cos^2x=1$

$Tan^2x+1= sec^2x$

$Cot^2x+1=csc^2x$

متطابقات ضعف الزاوية

$$sin\ sin\ 2\theta = 2\ sin\ sin\ \theta\ cos\ cos\ \theta$$

$$cos\ cos\ 2\theta = \quad Cos^2\theta - sin^2\theta$$

متطابقات المجموع والفرق بين زاويتين

$$sin\ sin\ (x+y) = sin\ sin\ x\ cos\ cos\ y + cos\ cos\ x\ sin\ sin\ y$$

$$sin\ sin\ (x-y) = sin\ sin\ x\ cos\ cos\ y - cos\ cos\ x\ sin\ sin\ y$$

$$cos\ cos\ (x+y) = cos\ cos\ x\ cos\ cos\ y - sin\ sin\ x\ sin\ sin\ y$$

$$cos\ cos\ (x-y) = cos\ cos\ x\ cos\ cos\ y + sin\ sin\ x\ sin\ sin\ y$$

$$tan\ tan\ (x+y) = \frac{tantan\ x + tantan\ y}{1 - tantan\ x\ tantan\ y}$$

$$tan\ tan\ (x-y) = \frac{tantan\ x - tantan\ y}{1 + tantan\ x\ tantan\ y}$$

الامثلة:برهن المتطابقات التالية

A- $sin\ sin\ x\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

B- $x - x = \quad x.x$

C- $x + \frac{coscos\ x}{1+sinsin\ x} = sec\ sec\ x$

A

ناخذ الطرف الايمن = $sin\ sin\ x\sqrt{-1}$

$= sin\ sin\ x\sqrt{x}$

$= sin\ sin\ x\ cot\ cot\ x$

$$=_{sin}\ sin\ x.\frac{cos\ cos\ x}{_{sin}sin\ x}=cos\ cos\ x=\frac{1}{sec\ sec\ x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

B

$$x-x=\frac{x}{x}-x=\frac{x-xx}{x}=\frac{x\,(1-x\,)}{x}=\frac{x\,.\,x}{x}=\frac{x}{x}x=x.x$$

C

$$_{tan}\ tan\ x+\frac{_{cos}\ cos\ x}{1+sin\ sin\ x}=\frac{x}{x}+\frac{cos\ cos\ x}{1+sin\ sin\ x}=\frac{x(1+sin\ sin\ x\,)+x}{x\,(1+sin\ sin\ x\,)}$$
$$=\frac{sin\ sin\ x+x\ +\ x}{x\,(1+sin\ sin\ x\,)}=\frac{sin\ sin\ x+1}{x\,(1+sin\ sin\ x\,)}=\frac{1}{x}=sec\ sec\ x$$

الدوال اللوغارتمية:- من دراساتنا السابقة نعلم ان كل عدد يمكن ان يوضع على شكل عدد اخر مرفوع الى قوة معينة مثال$100=10^2$وهذا يعني ان لوغاريتم 100 للاساس 10 هو2 $100=2$ الفائدة من اللوغارتم هي تسهيل العمليات الحسابية

خواص اللوغارتمات

1-$_{log}\ log\ (xy)=log\ log\ x+log\ log\ y$

2-$_{log}\ log\ \frac{x}{y}=log\ log\ x-log\ log\ y$

3-$_{log}\ log\ x^n=n\ log\ log\ x$

$_{log}\ log\ \sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}log\ log\ x$ 4-

امثلة : جد قيمة اللوغارتمات التالية

$x=3$ -1

$10^3=x$ $x=1000$

$5x=-4$ $(2)^{-4}=5x$ $\frac{1}{2^4}=5x$ $x=\frac{1}{80}$ -3

$(x^2 + 5x + 2) = 4$ $(x^2 + 5x + 2) = 2^4$ -4

$x^2 + 5x + 2 = 16$ $x^2 + 5x - 14 = 0$ $(x - 2)(x - 7) = 0$

X=2 x=7

-:الدالة الاسية

هي الدالة العكسية لدالة اللوغارتم الطبيعي وتعرف $y=e^x \rightarrow x=lny$

منطلقها جميع الاعداد الحقيقية ومداها جميع الاعداد الموجبة

خواص الدالة الاسية

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e$$

$$e^a . e^b = e^{a+b}$$

$e^{(a)b}$=e^{ab}

دوال القطع الزائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

تمثل معادلة قطع زائد بؤرتاه على محور السينات X يطبقان محوراه على محورين الاحداثين ونقطة تقاطع محورية هي نقطة الاصل

النتقطتان^-A(A(a,0) , -a,0) راسا القطع الزائد والبعد بينهما a2 ويسمى طول المحور الحقيقي والبؤرتان في هذه الحالة تنتميان الى محور x .

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

تمثل معادلة قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات y يطبقان محوراه على محورين الاحداثين ونقطة تقاطع محورية هي نقطة الاصل

النتقطتانA^-(0 , -a) A(0,a) , راسا القطع الزائد والبعد بينهما 2a ويسمى طول المحور الحقيقي والبؤرتان في هذه الحالة تنتميان الى محور y .

- جد البؤرتين والراسين وطول كل من المحور الحقيقي والمحور المرافق لكل من القطع الزائد التالية:-

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \qquad \frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$$

$16x^2-9y^2=144$ $4y^2-5x^2=20$

الغاية:يعتبر من اهم المفاهيم في الرياضيات ولاجل تقؤيب مفهوم الغايية نخذ المثال التالي:-

الدالة f: R→R بحيث ان لكل X€R

$F(x)=x^2-1$

فلو اعطينا قيما لxاقل بقليل من العدد 2 او اكثر بقليل من العدد 2 فالجدول الاتي الذي نلاحظفيه ان قيمة االدالة f تقترب جدا الى العدد 3 كلما اقتربت قيمة x من العدد 2 .

2>X	F(x)	2<X	F(x)
1.7	1.89	2.3	4.2
1.9	2.61	2.1	3.41
1.99	2.96	2.001	3.004
1.999	2.996	2.0001	3.0004

فيمكن القول ان الغاية للدالة 1- $f(x)=x^2$ في العدد 2 هي 3

تعريف : يقال ان L $= f(x)$ اذا وفقط اذاتحقق الشرط الاتي :-

لكل عدد حقيقي $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث ان $|f(x) - L| < \epsilon \rightarrow |x - a| < \delta$

وهذا يعني انه عندما تكون قيمة x قريبة من a فان f(x) تكون قريبة من Lمع الملاحظة ان الرمز ϵ يقرا ابسلون والرمز δ يقرا دلتا

خواص الغاية:-

1- اذا كان c) y=f(x)=c كمية ثابتة) فان $f(x) = c$

2- (k اذا كانت $f(x) = A$ و ان $g(x) = B$ كمية ثابتة)

$$[k.f(x)] = kf(x) = kA$$

3- $[f(x) \pm g(x)] = f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B$

4- $[f(x) . g(x)] = f(x) . \lim_{x \to a} g(x) = A.B$

5- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{limf(x)_{x \to a}}{limg(x)_{x \to a}} = \frac{A}{B}$ B$\neq$ 0,

6- $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$

لايجاد قيمة غاية اية دالة نبدا بتطبيق الخواص السابقة ثم نعوض عن المتغير بالقيمة التي تقترب فيها فاذا كانت النتيجة عددا حقيقيا فان هذا العدد هو قيمة الغاية اما اذا كانت النتيجة غير معرفة فعندئذ يجب ازالة عدم التعريف وهناك طرق كثيرة منها : ملاحظة

طريقة التحليل الى العوامل 2- طريقة الضرب بالمرافق 3- طريقة تبديل المتغير -1 -1

.اوجد غاية كل من الدوال الاتية -: الامثلة

1-$(3x^2 + 2x + 5) = \lim_{x\to1} 3x^2 + \lim_{x\to1} 2x + \lim_{x\to1} 5$ =3(1)+2(1)+5=10

2- $\lim_{x\to3} \frac{3x^2+1}{x-2} = \frac{(3x^2+1)_{x\to3}}{lim(_{x\to3}x-2)} = 28$

3- $\frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to-2} (x-2) = -4$

4- $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} . \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to0} \frac{x+4-4}{x\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to0} \frac{x}{x\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$

غاية الدوال المثلثية:

1- $\lim_{x\to} sin\, sin\, x = 0$

2- $\lim_{x\to0} cos\, cos\, x = 1$

3- $\lim_{x\to0} \frac{sinsin\, x}{x} = 1$

4- $\lim_{x\to0} \frac{1-coscos\, x}{x} = 0$

امثلة :-

1- $\lim_{x\to 0} \frac{tantan\,x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sinsin\,x}{cos\,x}}{x} = \lim_{x\to 0} [\frac{sinsin\,x}{cos\,x} * \frac{1}{x}] = \lim_{x\to 0} \frac{sinsin\,x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{coscos\,x} =$

$1.\frac{1}{1} = 1$

2- $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x)}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x)}{x} = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x)}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{6} * 1 = \frac{1}{6}$

3- $\lim_{x\to 0} \frac{csccsc\,x - cotcot\,x}{sin\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{csccsc\,x - cotcot\,x}{sin\,x} * \frac{csccsc\,x + cotcot\,x}{csc\,x + cotcot\,x} =$

$\lim_{x\to 0} \frac{x-x}{sin\,x(\frac{1}{sinsin\,x} + \frac{coscos\,x}{sin\,x}} = lim(_{x\to 0} \frac{1}{sinsin\,x(\frac{1+coscos\,x}{sin\,x})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+coscos\,x} =$

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

<u>التفاضل</u>: - المشتقات وقوانينها-

- مفهوم مشتقة الدالة : المشتقة للدالة f يرمز لها f بحيث ان قيمتها في اي عدد (x) هو $f(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$، على ان تكون هذه الغاية موجودة

وتقرا f prime of x) $(f(x)$ مشتقة الدلة f بالنسبة الى x وهناك رموز اخرى تستعمل للتعبير عن مشتقة الدالة y= f(x) بالنسبة الى x هي :

$\frac{dy}{dx}, y\,', \frac{d}{dx} f(x), \quad Dx$

ويقال للدالة f(x) انها قابلة للاشتقاق او تفاضلية في العددa)) اذاكانت $f(a)$ موجودة والا فهي غير قابلة للاشتقاق.

مثال : جد مشتقة الدالة $f(x)=x^2-5x$ باستعمال التعريف ثم جد $f(0), f(3)$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = 5(x+\Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x - 5x - 5\Delta x$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x - 5x - 5\Delta x - x^2 + 5x$$

$$= 2x\Delta x + \Delta^2 x - 5\Delta x$$

وبالقسمة على Δx 2x+ Δx -5

وباخذ الغاية عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على

$f(x)$=2x-5

$f(0)$=2(0)-5=-5

$f(3)$=2(3)-5=1

مثال :-

Y=$\sqrt{2x+1}$ x≥ 0

Y+$\Delta y = \sqrt{2(x+\Delta x)+1} = \sqrt{2x+2\Delta x+1}$ =$(2x+2\Delta x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$\Delta y = (2x+2\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$\Delta y = (2x+2\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}$=$[\frac{(2x+2\Delta x+1)^{\frac{1}{2}}+(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{(2x+2\Delta x+1)^{\frac{1}{2}}+(2x+1)^{\frac{1}{2}}}]$

$=\frac{2\Delta x}{(2x+2\Delta x+1)^{\frac{1}{2}}+(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x-2\Delta x+1)^{\frac{1}{2}}+(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}+(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{2(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = (2x+1)^{\frac{-1}{2}}$$

- قاعدة لوبيتال:- اذاكانت a عدد حقيقي وكانت f,g دالتين قابلتين للاشتقاق بحيث ان g(a)=F(a)=0 وان الغاية $\frac{f(a)}{g(a)}$ موجودة فعند ئذ

$\frac{f(a)}{g(a)}$ $\frac{f(a)}{g(a)}$

- <u>قوانين الاشتقاق</u> :-

1- اذا كان f(x)=c اذ ان c ثابت حقيقي فان $f(x)=0$

2- اذا كان n عدد صحيح موجب وكانت $f(x)=x^n$ فان

$$f(x) = nx^{n-1}$$

3- اذا كان c ثابت وكانت f دالة قابلة للاشتقاق فان $\frac{d}{dy}[cf(x)] = c.f(x)$

4- لتكن g(x) , f(x) دالتين قابلين للاشتقاق فان : $\frac{d}{dy}[f(x) + g(x)] = f(x) + g(x)$

5- اذاكانت f(x) وg(x) دالتين قابلتين للاشتقاق فان $\frac{d}{dy}[f(x).g(x)] = f(x).g(x) +$
$g(x).f(x)$

6- اذاكانت f(x) وg(x) دالتين قابلتين للاشتقاق فان

بشرط ان $g(x)\neq 0$ $\frac{d}{dy}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{f(x).g(x)-g(x).f(x)}{[g(x)]^2}$

اي ان مشتقة الدالة الكسرية $=\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{\text{المقام مربع}}$

7- اذاكانت f(x) دالة قابلة للاشتقاق وان n عدد حقيقي فان :

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}\frac{df}{dx}$$

8- اذا كان a ثابت و n عدد صحيح سالب فان

$$\frac{d}{dx}(ax^{-n}) = -anx^{-n-1}$$

9- اذا كان a ثابتا فان

$$\frac{d}{dx}(ax) = a$$

10- اذا كانت $f(x)=x^{-n}$ حيث ان n عدد صحيح موجب فان

$$f(x) = -nx^{-n-1}$$

:: مثال

اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية

1- $Y = x \rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$

2- $F(x)=y=5x^7-2x^6+3x^2-2x+4$

$$f(x) = \frac{dy}{dx} - 35x^6 - 12x^5 + 6x - 2$$

3- $Y=4 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

4- $Y=(3x^2 +5x)(6x^3-2x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = (6x + 5)(6x^3 - 2x^2) + (18x^2 - 4x)(3x^2 + 5x)$$

5- $Y=\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6- $Y=\frac{x^4}{6x^2-2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(6x^2-2)4x^3-x^4(12x)}{(6x^2-2)^2}$

7- $Y= (7x^2 + 5)^4$

$$y = 4(7x^2 + 5)^3(14x) = 56(7x^2 + 5)^3$$

8- $F(x)=\sqrt[3]{x^2 - 3x} = (x^2 - 3x)^{\frac{1}{3}}$

$$f(x) = \frac{1}{3} = (x^2 - 3x)^{\frac{-2}{3}} (2x-3)$$

9- $F(x)=[6x^2 + \sqrt{x^3 - 2}]^6 = [6x^2 + (x^3 - 2)^{\frac{1}{2}}]^6$

$$f(x) = 6[6x^2 + (x^3 - 2)^{\frac{1}{2}}]^5 . [12x + \frac{1}{2}(x^3 - 2)^{\frac{-1}{2}}.3x^2]$$

$$Y=\left(\frac{6x^3-12}{15x^2-7}\right)^3 \quad -10$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{6x^3 - 12}{15x^2 - 7}\right)^2 . \frac{(18x^2)(15x^2 - 7) - (30x)(6x^3 - 12)}{(15x^2 - 7)^2}$$

$$Y=\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{\sqrt{x}} + 10 \quad -11$$

$$Y=3x^{\frac{-1}{3}} - 5x^{\frac{-1}{2}} + 10$$

$$y = 3\left(-\frac{1}{3}\right)x^{\frac{-4}{3}} - 5\left(\frac{-1}{2}\right)x^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{5}{2\sqrt{x^3}}$$

$$Y=\frac{3x^3}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{3x^3}{\left(4x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} \quad -12$$

$$y = \frac{(4x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}(9x^2) - \frac{1}{2}(4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}.8x\,.\,3x^3}{4x^2 + 1}$$

- **the chain rule** قاعدة السلسلة

عندما لاتكون العلاقة مباشرة من المتغيرين الاساسيين (x,y) ولايجاد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ هنال حالتان

1- اذا كان متغير مثل z يقم وسطهما بالعلاقة اي

Y= f(z) , z=f(x)

فنستخدم القانون التالي $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} , \frac{dz}{dx}$

2- اذا كان كل من x,y دوال لمتغير ثالث جديد z مثلا اي

Y= f(z) ,x= f(z)

فنستخدم القانون التالي $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}$

مثال اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية

1- $Y=6z , z=2x^2-3x$

$$\frac{dy}{dz} = 18z^2 \quad , \frac{dz}{dx} = 4x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = (18z^2)(4x - 3)$$

2- $Y=4z^5 , x=\frac{3}{z^2}$

$$\frac{dy}{dz} = 20z^4 \quad , \frac{dx}{dz} = -6z^{-3} = -\frac{6}{z^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{20z^4}{-\frac{6}{z^3}} = -\frac{10}{3} z^7$$

3- $Y=\frac{5}{\sqrt{2z}} \qquad , z = \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \left(\frac{x}{x-2}\right)^{\frac{-1}{2}}$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{5}{2}(2z)^{-3/2} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 1/2 \left(\frac{x}{x-2}\right)^{-1/2} . \frac{(x-2)-x}{(x-2)^2},$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2\left(\frac{x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}}.\frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5}{2}(2z)^{-\frac{3}{2}}.\frac{1}{\sqrt{x(x-2)^3}}=-\frac{5}{2\sqrt{(2z)^3}x(x-2)^3}$$

4- اوجد $\frac{dy}{dt}$ اذا كان

$y=x^{3-}4x^2+6x$ $\quad$ $X=\sqrt{t^3+1}$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(t^3+1)^{-\frac{1}{2}}.3t^2 \quad , \quad \frac{dy}{dx}=3x^2-8x+6$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}=(3x^2-8x+6)\frac{3}{2}\frac{t^2}{\sqrt{t^3+1}}$$

تفاضل الدوال الغير الجبرية

- **تفاضل الدوال المثلثية Differentiaion of trigonometric functions**

ان قوانين التفاضل لهذه الدوال هي:-

اذاكانت u=f(x) فان :

1-$y=sin\ sin\ u \rightarrow \frac{dy}{dx}=cos\ cos\ u\ .\frac{du}{dx}$

2-$Y=cos\ cos\ u \rightarrow \frac{dy}{dx}=-sin\ sin\ u.\frac{du}{dx}$

3-$Y=tan\ tan\ u \rightarrow \frac{dy}{dx}=u.\frac{du}{dx}$

$Y=_{cot}\ cot\ u \rightarrow \frac{dy}{dx} = -u.\frac{du}{dx}$ -4

$Y=_{sec}\ sec\ u \rightarrow \frac{dy}{dx} = sec\ sec\ u.\square\square\square\ tan\ u.\frac{du}{dx}$ -5

$Y=_{csc}\ csc\ u \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\ csc\ csc\ u\ .cot\ cot\ u\ \ .\ .\frac{du}{dx}$ -6

مثال : اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية.

$Y=_{sin}\ sin\ 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = cos\ cos\ 2x.2$ -1

$Y=_{tan}\ tan\ (x^2+2x+3)$ -2

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+2x+3)(2x+2) = (2x+2)\ sec^2(x^2+2x+3)$$

$Y=x \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\ tan\ tan\ x.x$ -3

$Y=_{sec}\ sec\ \sqrt[3]{x}$ $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x}.sec\ sec\ \sqrt{x}\ .tan\ tan\ \sqrt{x}\ .\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x}\ .\ tan\ tan\ \sqrt{x}$ -4