المعهد اذلتقني /كركوك

قسم التقنيات الكهربائية

المرحلة الاولى

المادة

الرياضيات

مكتب المعهد/ قبالة المعهد التقني كركوك

رياضيات. ص ل ك

المصفوفات: Matrix

وهي عبارة عن اعداد مرتبة على شكل صفوف او أعمدة داخل قوسين كبيرين ويرمز لها بحرف كبير A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m*n}$$

حيث ان m×n تمثل مرتبة (سعة المصفوفة). وان m تمثل الصفوف و n تمثل الاعمدة.

وان الارقام الموجودة داخل الصفوف تمثل موقع العنصر داخل المصفوفة حيث ان a_{ij} i: يمثل رقم الصف، j يمثل رقم العمود

فمثلاً:

a_{11}: يمثل موقع العنصر الاول في الصف الاول والعمود الاول.

a_{12}: يمثل موقع العنصر الثاني في الصف الاول والعمود الثاني

أمثلة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2*2} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}_{1*3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2*3} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}_{3*3}$$

أنواع المصفوفات :

① المصفوفة المربعة :- وهي المصفوفة التي تكون فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة أي أن $m=n$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2*2} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{3*3}$$

② المصفوفة الصفرية :- وهي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها أصفار .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2*1} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2} \quad [0\ 0\ 0]_{1*3}$$

③ المصفوفة القطرية :- وهي مصفوفة (مربعة) جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي $\neq$ صفر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{3*3}$$

القطر الرئيسي

④ المصفوفة الاحادية (الذاتية) :- وهي مصفوفة قطرية جميع عناصرها يساوي صفر ماعدا عناصر القطر الرئيسي = 1 ويرمز لها I

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⑤ المصفوفة المتناظرة :- وهي مصفوفة (مربعة) تكون فيها العناصر الواقعة على جانبي القطر الرئيسي متناظرة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات: ① جمع ② طرح ③ ضرب بعدد ثابت

مثال: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

① الجمع

أ) $A+B$ ب) $B+A$

Solution:

أ) $A+B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

ب) $B+A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

عملية أبدالية $A+B = B+A$

② الطرح

$A-B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

$B-A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

ليست أبدالية $A-B \neq B-A$

③ الضرب بعدد ثابت

$3A$

$3\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

المحددات : Determinants

هي تمثل قيمة الصفوفة وتمثل بعدد حقيقي وتحسب للصفوفات المربعة فقط ويرمز لها بالرمز det أو |A|

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$$ محدد ثنائي

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$ محدد ثلاثي

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ محدد رباعي

* عند حساب قيمة المحدد من الرتبة الثانية

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{2*2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

مثال: جد قيمة المحددات التالية:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (3)(6) - (2)(4) = 18 - 8 = 10$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = (6)(7) - (-4)(-5) = 42 - 20 = 22$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(4) - (-2)(2) = -4 - 4 = -8$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (-1)(3) = 8 + 3 = 11$$

* عند حساب قيمة محدد ثلاثي التركيب (ذات رتبة 3×3) فتتبع الطريقة التالية

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(+ − +)

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

a 22

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

a 33

أمثلة: جد قيمة المحددات التالية:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

(+ = −)

$$= 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4-8) - 0 + (4+5)$$
$$= 3(-12) - 0 + 9$$
$$= -36 + 9$$
$$= -27$$

ملاحظة:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

أمثلة: جد قيمة المحددات التالية:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

(+ − +)

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-7+36) - 3(35-18) - 4(-30+3)$$

$$= 2(29) - 3(17) - 4(-27) = 115$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4*3\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 12[2(5) - 1(1) - 1(5-2)] = 12(10-1-3) = 72$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

س خواص المحددات:

① اذا احتوى عناصر صف أو عمود على أصفار (صفر) فان قيمة المحدد = صفر

② اذا احتوى عناصر صف أو عمود على عامل مشترك فانه يمكن اخراج كعامل مشترك للمحدد نفسه.

③ اذا كانت عناصر اي صفين أو عمودين متساوية أو متناظرة فان قيمة المحدد = صفر

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

لأن العمود الثاني مضعف العمود الأول.

أمثلة: حل بنية المحددات التالية:

$$|A| = \begin{vmatrix} -6 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -6(3) - 4(4 - 15) + 3(-2)$$
$$= -18 - 4(-11) - 6$$
$$= -18 + 44 - 6 = -24 + 44 = 20$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -5(-8 - 3) - 0 - 1(-12)$$
$$= -5(-11) + 12 = 67$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

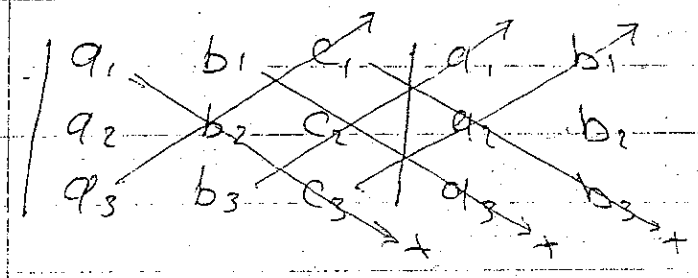
$$= 3(6 + 12) - 2(30) - 1(-15)$$
$$= 3(18) - 60 + 15$$
$$= 54 - 60 + 15 = 69 - 60$$
$$= 9$$

القاعدة الخاصة لإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة فقط

تعرف هذه القاعدة كما يأتي:

① نكرر كتابة العمودين الأول والثاني بالترتيب الى يمين المحدد.

② إيجاد مجموع نواتج ضرب الحدود كما هو مبين بالأسهم الموجبة ثم



$$= (a_1 b_2 c_3) + (b_1 c_2 a_3) + (c_1 a_2 b_3) - [(a_3 b_2 c_1) + (b_3 c_2 a_1) + (c_3 a_2 b_1)]$$

مثال / اوجد قيمة المحدد باستخدام القاعدة الخاصة

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-10 + 0 + 6) - (-1 + 16 + 0) = -4 - 15 = -19$$

ن.م / اوجد قيمة المحدد باستخدام القاعدة الخاصة

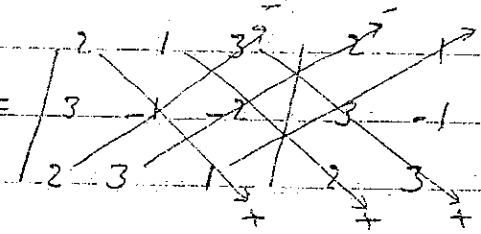
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (28 + 20 + 0) - (24 + 0 + 84)$$

$$= 48 - 108 = -60$$

H.W أوجد قيمة المحدد

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$



$$= [(-2) - 4 + 27] - [-6 - 12 + 3]$$

$$= 21 - (-15) = 21 + 15 = 36$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1+6) - 1(3+4) + 3(9+2)$$

$$= 2(5) - 1(7) + 33 = 36$$

2

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(15-4) - 3(12-2) + 1(8-5)$$

$$= 2(11) - 3(10) + 3$$

$$= 22 - 30 + 3$$

$$= 25 - 30$$

$$= -5$$

H.W

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-6) + (-3-3) - 2(-6)$$

$$= -12 + 0 + 12$$

$$= 0$$

مثال: اوجد حاصل جمع المصفوفات A, B

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2*3} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 8 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}_{2*3}$$

$$\therefore C = A + B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 8 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 7 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2*3}$$

ملاحظة: لا يجوز الجمع اذا لم تكن المصفوفات من نفس الدرجة

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال: اطرح المصفوفة B من المصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 8 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 8 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -9 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix}_{2*3}$$

مثال: اذا كان $A = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، $r = 3$ ، $k = 5$

اوجد AK ، rB ، $k(A+B)$ ، $(k+r)A$

$$AK = 5\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -35 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$$

$$rB = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$$

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$\begin{bmatrix} 40 & -35 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 5 & 0 \\ 25 & 20 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 45 & -35 \\ 15 & 40 \end{bmatrix}$$

$$(k+r)A = (5+3)\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 8\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & -56 \\ -16 & 32 \end{bmatrix}$$

H.6 kA حيث $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $k = 4$ ثم B اوجد

(a)

$$kA = 4\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) kA حيث $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $k = -2$ ثم B اوجد

$$kA = -2\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

حل المعادلات الآنية الخطية بطريقة (كرايمر)

مثال: حل المعادلة الآنية الخطية بطريقة المحددات (كرايمر) مع التحقق

$$2x + 3y = 5 \quad \text{---------} (1)$$
$$3x - y = 2 \quad \text{---------} (2)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11$$

(محددة لنا)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 15 = -11$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-11}{-11} = 1$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-11}{-11} = 1$$

التحقق: نعوض في المعادلتين عن قيم x, y

$$2x + 3y = 5$$
$$2(1) + 3(1) = 5$$
$$2 + 3 = 5$$
$$5 = 5$$

∴ الحل صحيح

$A = \begin{vmatrix} x & y \\ & \end{vmatrix}$

نعوض بدل كل x ما يعادله A_x

نعوض بدل كل y ما يعادله A_y

$x = \frac{|A_x|}{|A|}$

$y = \frac{|A_y|}{|A|}$

مثال $2x + 4y = 3$ ——— (1)

$x - 2y = -1$ ——— (2)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8 \neq 0$$

$$|Ax| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$$

$$|Ay| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$x = \frac{|Ax|}{|A|} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{|Ay|}{|A|} = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$$

التحقق ـ بالتعويض في (1)

$$2x + 4y = 3$$

$$2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{5}{8}\right) = 3$$

$$\frac{2}{4} + \frac{20}{8} = 3$$

$$\frac{4 + 20}{8} = 3$$

$$\frac{24}{8} = 3$$

$3 = 3$

$x = \frac{1}{4}$ ، $y = \frac{5}{8}$ الحل صحيح

حل المعادلات الآنية الخطية بطريقة المحددات كرامر مع التحقق

$$x + y + z = 2 \quad \text{---} ①$$
$$2x - y + z = 0 \quad \text{---} ②$$
$$x + 2y - z = 4 \quad \text{---} ③$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{عمود الثوابت}$$

$$|A| = 1(1-2) - 1(-2-1) + 1(4+1)$$
$$|A| = -1 + 3 + 5 = \boxed{7} \neq 0$$

$$|Ax| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(+1-2) - 1(0-4) + 1(0+4)$$
$$= -2 + 4 + 4 = \boxed{6}$$

$$|Ay| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1(-4) - 2(-2-1) + 1(8-0)$$
$$= -4 + 6 + 8 = \boxed{10}$$

$$|Az| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1(-4-0) - 1(8-0) + 2(4+1)$$
$$= -4 - 8 + 10 = \boxed{-2}$$

$$x = \frac{|Ax|}{|A|} = \frac{6}{7}, \quad y = \frac{|Ay|}{|A|} = \frac{10}{7}, \quad z = \frac{|Az|}{|A|} = \frac{-2}{7}$$

التحقق: في المعادلة ①

$$x + y + z = 2$$
$$\frac{6}{7} + \frac{10}{7} - \frac{2}{7} = 2$$
$$\frac{6+10-2}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

∴ الحل صحيح

1/15

4.10 حل لمعادلات الآتية (الكوفية) بالطريقة إحذف (كرامر) مع التحقق.

$x - y - 4 = 0$ ——— (1)

$x + y - 5 = 0$ ——— (2)

$2x - 3y = 6$ ——— (1)

$6x - 4y = 18$ ——— (2)

$7x + 5y = -4$ ——— (1)

$11x + 3y = -1$ ——— (2)

و أيضا

$3x - 4y + 2z = 6$ ——— (1)

$2x - 3y + z = 1$ ——— (2)

$x + y + z = 6$ ——— (3)

$x + z = -3$ ——— (1)

$x + y = 1$ ——— (2)

$2x + 3y - 4z = 9$ ——— (3)

$3x + 2y - z = 2$ ——— (1)

$2y + 4z = 4$ ——— (2)

$2x - 3z = -1$ ——— (3)

$x - z = 2$ ——— (1)

$3y - 2z = 2$ ——— (2)

$2x + z = 3$ ——— (3)

المتجهات Vectors

الكميات القياسية: وهي الكميات التي تمثل قيمة عددية ولا تمثل اتجاه. مثال ذلك الزمن والكتلة.

الكميات المتجهة: وهي الكميات التي تمثل قيمة واتجاه. مثال ذلك الازاحة والسرعة. ويرمز لها بحرف كبير مثل

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$

تمثيل المتجهة:

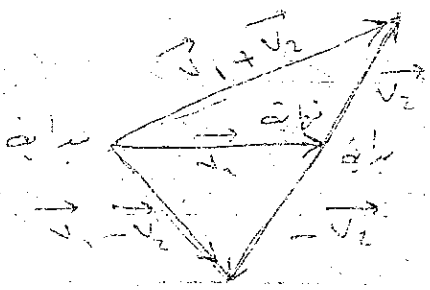
يمثل المتجه بقطعة مستقيم واتجاهه يمثل اتجاه المتجه وطوله يمثل قيمة المتجه العددية.

تساوي المتجهات:

① **المساواة:** يتساوى المتجهان اذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه.

② **المحصلة:**

اذا وضع نهاية المتجه $\vec{A}$ على بداية المتجه $\vec{B}$ فان محصلتهما هو متجه $\vec{C}$ الذي بدايته بداية المتجه $\vec{A}$ ونهايته هو نهاية $\vec{B}$



$\vec{A}+\vec{B}$

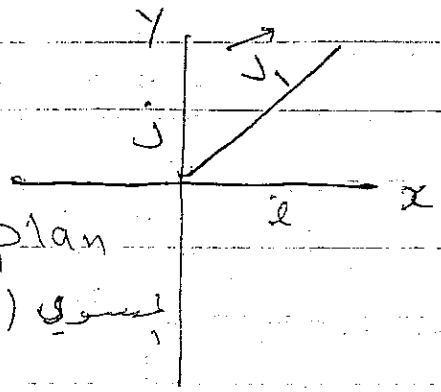
$\vec{B}+\vec{A}$

$\vec{A}-\vec{B}$

④ المتجه الصفري:

$$\vec{V_2} - \vec{V_2} = 0$$

⑤ إيجاد طول المتجه:



plan
المستوي (x, y)

$$\vec{V} = ai + bj$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

⑥ إيجاد المتجه:

$$\vec{V} = ai + bj$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{ai + bj}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

⑦ ضرب المتجه في عدد:

if $\vec{V} = ai + bj$

$c\vec{V} = cai + cbj$ where c = ثابت

⑧ جمع وطرح المتجهات:

$\vec{V_1} = ai + bj$, $\vec{V_2} = ci + Dj$

$$\vec{V_1} + \vec{V_2} = (a+c)i + (b+D)j$$

$$\vec{V_1} - \vec{V_2} = (a-c)i + (b-D)j$$

الرمز مع الأول للجمع
الثاني مع الثاني

(٨) المتجه الوحدة :

وهو المتجه الذي طوله يساوي وحدة واحدة

$$\vec{v} = i \Longrightarrow 1i + 0j$$

طول

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\vec{v} = j \Longrightarrow 0i + 1j$$

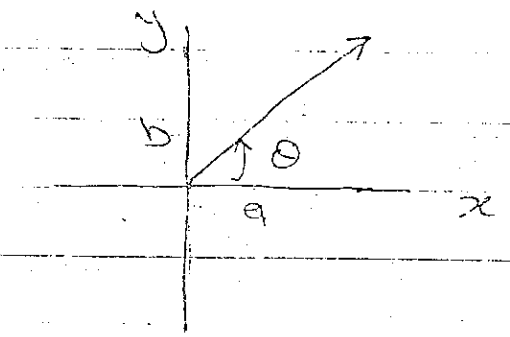
طول $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$

(٨) ايجاد قيمة الزاوية :

$$u = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$



مثال: اذا كانت $\vec{V_1} = 3i + 4j$, $\vec{V_2} = 5i - 2j$ أوجد

(1) $|\vec{V_1}|$ (2) $|2\vec{V_2}|$ (3) $\vec{V_1} + \vec{V_2}$ (4) $\vec{V_2} - \vec{V_1}$

(5) اتجاه $\vec{V_1}$ (6) $5\vec{V_2}$

الحل:

$$|\vec{V_1}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$2\vec{V_2} = (2*5)i - (2*2)j = 10i - 4j$$

$$|2\vec{V_2}| = \sqrt{10^2 + (-4)^2} = \sqrt{116}$$

$$\vec{V_1} + \vec{V_2} = 8i + 2j$$

$$\vec{V_2} - \vec{V_1} = (5-3)i + (-2-4)j$$

$$= 2i - 6j$$

$$\text{Dir } \vec{V_1} = \frac{\vec{V_1}}{|\vec{V_1}|} = \frac{3i+4j}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3i+4j}{5} = 3/5\, i + 4/5\, j$$

$$u = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j \Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{4/5}{3/4} = 4/3$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53^\circ$$

$$\therefore u = \cos 53\, i + \sin 53\, j$$

$$5\vec{V_2} = 25i - 10j$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

متجه الموضع :

اذا كانت لدينا نقطة في الفضاء مثلاً $P(x, y, z)$ فالمتجه الذي نقطة بدايته نقطة الأصل ونهايته النقطة P يسمى متجه موضع النقطة P ويكتب كالتالي :

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

مثال : اوجد المسافة بين النقطتين P_1, P_2

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

مثال : اوجد المسافة بين النقطتين $P_1(-2, 3, 0)$ ، $P_2(2, 1, 5)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2 - (-2))\vec{i} + (1 - 3)\vec{j} + (5 - 0)\vec{k}$$
$$= 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

واجب : لتكن $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ أوجد

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\vec{i} - 8\vec{j} + 3\vec{k}$

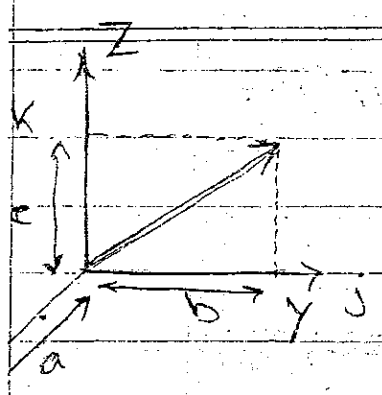
$-2\vec{v}_1 = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$

$|\vec{v}_1| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

$|\vec{v}_2| = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}$

$|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = \sqrt{25 + 4 + 1} = \sqrt{30}$

جبر المتجهات في الفضاء



إذا كان $\vec{v_1} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$

$\vec{v_2} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$

فإن:

① تساوي متجهين: $\vec{v_1} = \vec{v_2}$ إذا كان $x_1 = x_2$ ، $y_1 = y_2$ ، $z_1 = z_2$

② جمع متجهين:

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} = (x_1 + x_2) i + (y_1 + y_2) j + (z_1 + z_2) k$$

③ قانون الطول:

$$|\vec{v_1}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

④ الضرب في ثابت:

$$c\vec{v_1} = c(x_1) i + c(y_1) j + c(z_1) k$$

⑤ المتجه الصفري:

$$\vec{0} = 0i + 0j + 0k$$

تمرين ①

$\vec{v_1} = 2i + 5k$ ، $\vec{v_2} = 3i + 4j + 2k$

أوجد: ① $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ ② $|2\vec{v_2}|$ ③ $\vec{v_2} - \vec{v_1}$ ④ $|\vec{v_1} + \vec{v_2}|$

تمرين ②

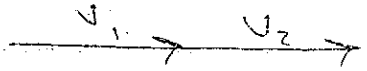
$\vec{v_1} = 2i + 5j - 7k$ ، $\vec{v_2} = i + j - k$

أوجد: ① $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ ② $-3\vec{v_1}$ ③ $|4\vec{v_1} + \vec{v_2}|$

④ $5|\vec{v_2}|$

حالات خاصة :

أ) عندما يكون المتجهان متطابقان

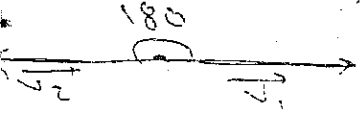


زاوية = صفر

$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = |\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|\cdot\cos\theta$$

$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = |\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}| \quad \text{because } \cos\theta = 0 = 1$$

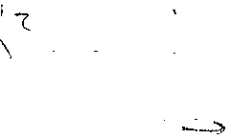
ب) اذا كان المتجهين متعاكسين والزاوية بينهما ١٨٠°



$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = -|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|$$

لان جتا ١٨٠ = -١

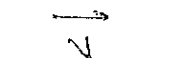
ج) اذا كانت الزاوية بين المتجهين ٩٠° فان المتجهين متعامدين



$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = 0$$

لان جتا ٩٠ = صفر

د) حاصل ضرب متجه في نفسه تقطيعاً



$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_1} = (|\vec{v_1}|)^2$$

هـ) $i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1$ ——— ①

$i\cdot j = j\cdot k = k\cdot i = 0$ ——— ②

الضرب التقطيعي

$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

الضرب في المتجهات

الضرب النقطي — Product point — Dot

الضرب الخارجي — Cross product — Cross

١. الضرب النقطي Point Product

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = |\vec{V_1}|\,|\vec{V_2}| \cos\theta$$

لإيجاد θ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{|\vec{V_1}|\,|\vec{V_2}|} \qquad \therefore \theta = \cos^{-1}$$

① إذا كانت:

$$\vec{V_1} = 2i - 3j + k$$
$$\vec{V_2} = 3i + 5j - 2k$$

جد ⓐ $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ ⓑ θ

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 6 - 15 - 2 = -11$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{|\vec{V_1}|\,|\vec{V_2}|} = \frac{-11}{\sqrt{14}\,\sqrt{38}} = \frac{-11}{\sqrt{532}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-11}{\sqrt{532}}$$

② $\vec{V_1} = 3i + 2j - 4k$, $\vec{V_2} = i + 2j - k$

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 3 + 4 + 4 = 11$$

$$\theta = \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{|\vec{V_1}|\,|\vec{V_2}|} = \frac{11}{\sqrt{29}\,\sqrt{6}} = 0.83 \Rightarrow \theta = \cos^{-1} 0.83$$
$$= 33.5^\circ$$

ايجاد الزاوية بين المتجهين

$\vec{V_1} = 3i - 4j + k$

$\vec{V_2} = 2i - 3k$

$$\cos\theta = \frac{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}}{|\vec{V_1}||\vec{V_2}|} = \frac{6+0-3}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = 0.16$$

$\theta = \cos^{-1} 0.16 = ??$

Cross Product الضرب الاتجاهي

اذا كانت

$\vec{V_1} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$

$\vec{V_2} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$

فان

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= i(y_1 z_2 - z_1 y_2) - j(x_1 z_2 - x_2 z_1) + k(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$= i - j + k$

للاحظات:

- $|\vec{A} \times \vec{B}|$ = مساحة متوازي الاضلاع
- $\frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2}$ = مساحة مثلث

لايجاد الزاوية $\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos\theta$

$\vec{A} \times \vec{B} = 0$ عندما يكون المتجهان متعامدان تمام

$i \cdot j = k \quad j \cdot k = i \quad k \cdot i = j$

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$

مثال اذا كانت $\vec{A} = 3i - 4j + k$

$\vec{B} = 0i + j + k$

اوجد ① $\vec{A} \times \vec{B}$ ② مساحة المثلث

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -5i - 3j + 3k$$

مساحة المثلث $= \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + (3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{25+9+9}}{2} = \frac{\sqrt{43}}{2}$

مثال اذا كانت $\vec{v}_1 = 3i - 4j + k$

$\vec{v}_2 = 2i - 3k$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = i(12-0) - j(-9-2) + k(0+2)$$

$$= 12i + 11j + 2k$$

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{2i + 11j + 8k}{\sqrt{26}\sqrt{13}}$$

مثال: بين اذا كان $\vec{A} // \vec{B}$ او لا

$$\vec{A} = 2i - 5j + 7k$$
$$\vec{B} = 6i - 15j + 21k$$

الحل:

$\vec{A} // \vec{B}$ فإن $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ اذا كان

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 2 & -5 & 7 & 2 & -5 \\ 6 & -15 & 21 & 6 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= (-105i + 42j - 30k) - (-30k - 105i + 42j)$$
$$= 0$$
$$\therefore \vec{A} // \vec{B}$$

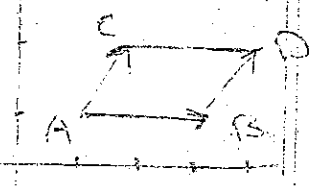
مثال: اوجد مساحة متوازي المستطيلات اذا كانت

$A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(2,2)$, $D(4,2)$

الحل:

$$\vec{AB} = (3-1)i + (1-1)j = 2i$$
$$\vec{AC} = (2-1)i + (2-1)j = i + j$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2k - 0 = 2k$$



المساحة $= |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{2^2}$

$= 2$

المتطابقات المثلثية والمعادلات المثلثية

النسب المثلثية:

1) جا $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{r}$

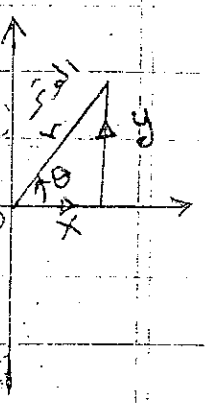
2) جتا $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{r}$

3) ظا $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{\cot\theta}$

4) ظتا $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta}$

5) قا $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{r}{x}$

6) قتا $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{r}{y}$



المتطابقات بإستخدام نظرية فيثاغورس

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

3) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

السؤال 1 : برهن صحة المتطابقات التالية :

1) $\sin x \sqrt{\csc^2 x - 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$

الطرف الأيسر :

$= \sin x \sqrt{\csc^2 x - 1}$

$= \sin x \sqrt{\cot^2 x}$

$= \sin x \cot x = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ الطرف الأيمن

2) $\frac{\cot^2 x}{1 + \sin x} = \csc^2 x - \csc x$

الحل

$\frac{\cot^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\csc^2 x - 1}{1 + \sin x} = \frac{(1/\sin^2 x) - 1}{1 + \sin x}$

$= \frac{\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}}{1 + \sin x} = \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{\sin^2 x \cdot (1 + \sin x)}$

$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} = \csc^2 x - \csc x$

∴ المتطابقة صحيحة

3) $\cos^4\phi - \sin^4\phi = 1 - 2\sin^2\phi$

الحل

$$\cos^4\phi - \sin^4\phi = (\cos^2\phi - \sin^2\phi)(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$$

$$= (\cos^2\phi - \sin^2\phi) \cdot 1$$

$$= 1 - \sin^2\phi - \sin^2\phi$$

$$= 1 - 2\sin^2\phi$$

4) $$1 + \frac{2\tan\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$$

الحل

$$1 + \frac{2\tan\theta}{1-\tan\theta} = \frac{1 - \tan\theta + 2\tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

$$= \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

$$= \frac{1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$$

5) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x$$

$$= \tan^2 x \cdot \sin^2 x$$

H.W 1) $\sqrt{\frac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x}} = \tan x$

$$= \sqrt{\frac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x}} = \frac{\sec x}{\csc x}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \tan x$$

2) $\frac{1+\cos y}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \cdot \tan y = \sec y + 1$

$$\frac{1+\cos y}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \cdot \tan y = \frac{1+\cos y}{\sqrt{\sin^2 y}} \cdot \tan y$$

$$= \frac{1+\cos y}{\sin y} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}$$

$$= \frac{1+\cos y}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\cos y} + 1$$

$$= \sec y + 1$$

3) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \csc\theta + \cot\theta$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \csc\theta + \cot\theta \quad \text{Y/S}$$

4) $\sin^2 y + \cos^2 y + \cot^2 y = \csc^2 y$

الحل $\sin^2 y + \cos^2 y + \cot^2 y = 1 + \cot^2 y$

$= \csc^2 y$

5) $\dfrac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x} = \tan^2 x$

الحل $\dfrac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x} = \dfrac{\sec^2 x}{\csc^2 x}$

$= \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{\sin^2 x}{1}$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

6) $\tan x + \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)} = \sec x$

الحل $\tan x + \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)} = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

$= \dfrac{(1+\sin x)\sin x + \cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}$

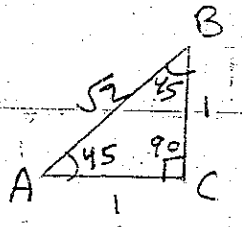
$= \dfrac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}$

$= \dfrac{\sin x + 1}{\cos x\,(1+\sin x)}$

$= \dfrac{(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

النسب المثلثية لزوايا خاصة

الزوايا الخاصة في $[0, 30, 45, 60, 90]$

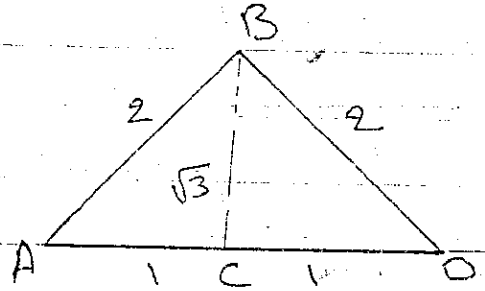


① الزاوية 45

$\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ — $\cot 45 = 1$

$\cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ — $\sec 45 = \sqrt{2}$

$\tan 45 = 1$ — $\cos 45 = \sqrt{2}$



② الزاوية 60 - 30

$\sin 30 = \frac{1}{2} = \cos 60$

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60$

$\tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60$

---

③ الزاوية $(0, 90)$

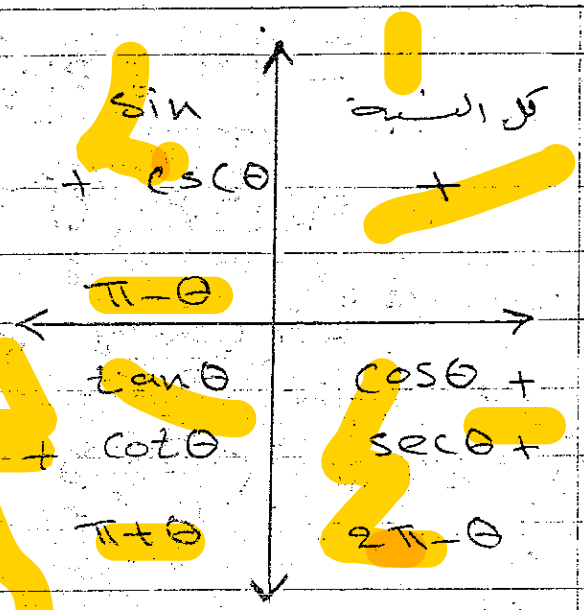
الزاوية / النسبة	0	30	45	60	90
Sinθ	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
Cosθ	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0
tanθ	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
Cotθ	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0
secθ	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
Coseθ	∞	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1

حل المعادلات المثلثية

المعادلة المثلثية : هي تلك المعادلة التي تحتوي على نسب زاوية مثلثية واحدة أو أكثر

أنواع منها :-

① إذا كانت من الدرجة الثانية ذات النسبة الواحدة فهي تحل إما بالتحليل بصورة مباشرة أو بالدستور



مثال / $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ حيث $0° \le x \le 180°$

الحل

$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$

$(3\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$

إما $(3\sin x - 1) = 0$ $\therefore \sin x = \frac{1}{3} = 0.33$

$x = 19°$

أو $(2\sin x - 1) = 0$ $\therefore \sin x = \frac{1}{2}$

$x = 30°$

$\because$ sin موجبة في الربع الأول والربع الثاني

$\therefore x = 180° - 30° = 150°$

في الربع الثاني $x = 180° - 19° = 161°$

④ في بعض المعادلات المثلثية صادف أكثر من نسبة مثلثية لحل هذه المعادلات بالاستعانة بالقوانين السابقة ويمكن تحويل هذه النسب الى نسبة واحدة.

مثال $4\cos^2 x - 4\sin x = 1 \quad 0^\circ \leq x \leq 90^\circ$

الحل $4\cos^2 x - 4\sin x = 1$

$4(1 - \sin^2 x) - 4\sin x - 1 = 0$

$4 - 4\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0$

$-4\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0 \quad \times(-1)$

$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

$(2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0$

اما $(2\sin x - 1) = 0 \quad \therefore 2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = 30^\circ$

او

$(2\sin x + 3) = 0 \quad \therefore 2\sin x = -3$

$\therefore \sin x = \frac{-3}{2}$ مرفوض

H.W

1) $18\cos^2\theta + 3\cos\theta = 1$

$18\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$

$(3\cos\theta + 1)(6\cos\theta - 1) = 0$

أو

$3\cos\theta + 1 = 0$ $\quad\quad$ $\theta = \cos^{-1}(0.33333)$

$3\cos\theta = -1$ $\quad\quad$ $\cos\theta = \frac{-1}{3} = -(0.33333) = 109.471$

$\theta = 180 - 109.471 = 70.528$ الربع الثاني

بما أن cos سالب في الربع الثاني والثالث

∴ هناك زاوية أخرى في الربع الثالث

$\theta = 180 + 70.528 = 250.528$

$6\cos\theta - 1 = 0$

$6\cos\theta = 1$

$\cos\theta = \frac{1}{6} = 0.1666666$

$\theta = \cos^{-1}(0.1666666) = 80.405$ بالربع الأول

∴ cos موجب في الربعين الأول والرابع هناك زاوية أخرى في الربع الرابع

$360 - 80.405 = 279.594$ بالربع الرابع

2) $3\tan^2 X - 2\tan X - 1 = 0 \quad : 0 \le X \le 90$

$(3\tan X + 1)(\tan X - 1) = 0$

أما

$3\tan X + 1 = 0$

$3\tan X = -1$

$\tan X = \frac{-1}{3} = -0.333333$

$X = \tan^{-1}(-0.333333) = -18.439$

$360 - 18.439 = 341.565$ (يحل) بالربع الرابع

بما ان tan سالب في الربعين الثاني والرابع فهناك زاوية اخرى بالربع الثاني

$180 - 18.439 = 161.565$ (يحل)

أو

$\tan X - 1 = 0$

$\tan X = 1$

$X = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$ بالربع الاول

بما ان tan موجب في الربعين الاول والثالث فهناك زاوية اخرى بالربع الثالث

$180 + 45 = 225^\circ$ (يحل) ربع الثالث

3) $\tan y + 3\cot y - 4 = 0$ $\quad \cot y = \frac{1}{\tan y}$

$\left(\tan y + 3\frac{1}{\tan y} - 4 = 0\right) * \tan y$

$\tan^2 y + 3 - 4\tan y = 0$

$\tan^2 y - 4\tan y + 3 = 0$

$(\tan y - 3)(\tan y - 1) = 0$

أو

$\tan y - 3 = 0 \quad \therefore \tan y = 3$

$y = \tan^{-1}(3) = 71.568^\circ$ ربع الأول

tan موجب في الربعين الأول والثالث

هناك زاوية أخرى في الربع الثالث

$y = 180 + 71.568 = 251.565^\circ$ ربع الثالث

أو $\tan y - 1 = 0 \Rightarrow \tan y = 1$

$\therefore y = 45^\circ$ ربع الأول

tan موجب في الربعين الأول والثالث

هناك زاوية أخرى في الربع الثالث

$y = 180 + 45 = 225^\circ$ ربع الثالث

4) $6\cos^2 X - 5\cos X + 1 = 0$

$(3\cos X - 1)(2\cos X - 1) = 0$

أما $(3\cos X - 1) = 0 \Rightarrow \cos X = \frac{1}{3}$

$\cos X = 0.333333$

$X = \cos^{-1}(0.333333) = 70.528°$ (بالحاسبة)

بما أن $\cos X$ موجب في الربعين الأول والرابع

إذن هناك زاوية أخرى في الربع الرابع

$X = 360 - 70.528 = 289.472°$ بالربع الرابع

أو $2\cos X - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos X = 1$

$\cos X = \frac{1}{2}$

$\therefore X = 60°$ بالربع الأول

بما أن $\cos X$ موجب في الربعين الأول والرابع

إذن هناك زاوية أخرى في الربع الرابع

$X = 360 - 60 = 300°$ بالربع الرابع

4) $8\sin^2 X + 6\cos X - 9 = 0$ $(\sin^2 X = 1 - \cos^2 X)$

$8(1 - \cos^2 X) + 6\cos X - 9 = 0$

$8 - 8\cos^2 X + 6\cos X - 9 = 0$

$-8\cos^2 X + 6\cos X - 1 = 0$ $\times(-1)$

$8\cos^2 X - 6\cos X + 1 = 0$

$(4\cos X - 1)(2\cos X - 1) = 0$

أو $4\cos X - 1 = 0 \quad \therefore 4\cos X = 1$

$\therefore \cos X = \frac{1}{4}$

$X = \cos^{-1}(\frac{1}{4}) = 75.522°$ ربع الاول

$\cos X$ موجب في الربعين الاول والرابع

هنا زاوية اخرى في الربع الرابع

$360 - 75.522 = 284.478°$ ربع الرابع

أو $(2\cos X - 1) = 0$

$\therefore 2\cos X = 1$

$\therefore X = \cos^{-1}(\frac{1}{2})$

$\therefore X = 60°$ الربع الاول

$\cos$ موجب في الربعين الاول والرابع

هنا زاوية اخرى في الربع الرابع

$360 - 60 = 300°$ ربع الرابع

5) $2\tan^2 y - 2 = 0 \quad 0 \leq y \leq 180$

$2\tan^2 y = 2$

$\tan^2 y = 1 \Rightarrow \tan y = \mp 1$

أما $\tan y = 1 \quad \therefore y = 45^\circ$ بالربع الاول

$\tan y =$ - موجب في الربعين الاول والثالث

$y = 180 + 45 = 225^\circ$ يعمل ربع الثالث

أو $\tan y = -1 \quad \therefore y = -45^\circ$ بالربع الرابع

$y = 360 - 45 = 315^\circ$ يعمل بالربع الرابع

$\tan y$ - سالب في الربعين الرابع والثاني

∴ هناك زاوية اخرى في الربع الثاني

$y = 180 - 45 = 135^\circ$ ربع الثاني

6) $\sin^2\theta = \frac{1}{3} \quad 0 \leq \theta \leq 90$

$\sin\theta = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\theta = \mp 0.577$

أما $\theta = \sin^{-1}(0.577) = 35.2398^\circ$ ربع الاول

$\sin\theta$ - موجب في الربعين الاول والثاني

∴ هناك زاوية تقع في الربع الثاني $\theta = 180 - 35.2398 = 144.76$ يعمل

أو $\sin\theta = -0.577$

$\theta = \sin^{-1}(0.577)$

$\theta = -35.239^\circ$ بالربع الرابع

$\theta = 360 - 35.239 = 324.761$ يعمل

$\sin\theta$ - سالب في الربعين الرابع والثالث

∴ هناك زاوية اخرى في الربع الثالث

$\theta = 180 + 35.239 = 215.239$ بالربع الثالث (يعمل) 2/15

الأس واللوغاريتمات وقوانينها

الأس: هو العدد الذي يكتب فوق العامل ليدلنا على عدد تكرار ذلك العامل وعليه فإنه قوانين الأس التالية لا تنطبق الا على العوامل فقط.

١. عند الضرب نجمع الأسس (عند ضرب العوامل المتشابهة مع بعضها)

$$(x^2y^3)(x^3y^5) = x^{2+3}\ y^{3+5} = x^5 y^8$$

$$x^{3/2}\ x^3 = x^{\frac{3}{2}+3} = x^{9/2} = \sqrt{x^9}$$

٢. عند القسمة نطرح الأسس (عند قسمة العوامل المتشابهة مع بعضها)

$$\frac{x^2y^3}{x^3y^5} = x^{2-3}\ y^{3-5} = x^{-1}\ y^{-2}$$

$$= \frac{1}{xy^2}$$

$$\frac{(x+y)^4}{(x+y)^2} = (x+y)^{4-2}$$

$$= (x+y)^2$$

٢. عند رفع العوامل إلى قوة معينة نأخذ أس تلك العوامل تضرب بتلك القوة المعينة.

$$(x^2y^3)^3 = x^6y^9$$

$$(x^2y^{1/2})^3 = x^6y^{3/2}$$

$$(x^2+y^3)^3 = (x^2+y^3)(x^2+y^3)(x^2+y^3)$$
$$= (x^4 + x^2y^3 + y^3x^2 + y^6)(x^2+y^3)$$
$$= (x^4 + 2x^2y^3 + y^6)(x^2+y^3)$$
$$= x^6 + 2x^4y^3 + x^2y^6 + x^4y^3 + 2x^2y^6 + y^9$$
$$= x^6 + 3x^4y^3 + 3x^2y^6 + y^9$$

٤. عند جذر العوامل نقسم دليل معين لأس نقسم على ذلك الدليل

$$\sqrt{x^2y^6} = xy^3$$

$$\sqrt{\frac{y^3}{x}} = \frac{y^{3/2}}{x^{1/2}}$$

اللوغاريتم : من دراستنا السابقة نعلم أن كل عدد يكتب أس
يوضح على شكل عدد آخر مرفوع الى قوة معينة .
مثلاً $10^2 = 100$ وهذا يعني أن لوغاريتم 100 للاساس 10 هو

$$\log_{10}^{100} = 2$$

$$125 = 5^3 \qquad \log_5^{125} = 3$$ اللوغاريتم الاساس

قوانين اللوغاريتمات :

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x^n = n \log x$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x$$

أمثلة : جد اللوغاريتمات التالية :

$$\log_{10}^{x} = 3$$

$$(10)^3 = x \longrightarrow x = 1000$$

$$\log_2^{5x} = -4$$

$$(2)^{-4} = 5x \quad , \quad \frac{1}{(2)^4} = 5x \longrightarrow x = \frac{1}{80}$$

مثال: جد قيمة $\log_{10}^{20}$ اذا كانت $\log_{10}^{2} = 0.3010$

$$\log^{20} = \log^{2(10)} = \log^{2} + \log^{10}$$
$$= 0.3010 + 1 = 1.3010$$

مثال: حل المعادلة الاتية

$$\log_{2}^{(x^2+5x+2)} = 4$$

$$x^2+5x+2 = 2^4$$
$$x^2+5x+2 = 16$$
$$x^2+5x-14 = 0$$
$$(x-2)(x+7) = 0$$
$$\therefore x = 2 \quad , \quad x = -7$$

جد قيمة x في كل مما يأتي:

$$\log_{10}^{x} = 5$$

$$10^5 = x \longrightarrow x = 100000$$

$$\log_{4}^{2x} = 3$$

$$2x = 4^3$$
$$64 = 2x$$
$$x = \frac{64}{2}$$
$$x = 32$$

ج) بين $\log_{10}^{25}$ اذا علمت ان $\log_{10}^{2} = 0.3010$

$$\log_{10}^{(5)(5)} = \log_{10}^{5} + \log_{10}^{5}$$

$$= \log_{10}^{\frac{10}{2}} + \log_{10}^{\frac{10}{2}}$$

$$= \log_{10}^{10} - \log_{10}^{2} + \log_{10}^{10} - \log_{10}^{2}$$

$$= 1 - 0.3010 + 1 - 0.3010$$

$$= 2 - 0.6020 = 1.398$$

د) بين $\log_{9}^{27}$

نفرض $\log_{9}^{27} = a$

$$27 = 9^{a}$$

$$3^{3} = 3^{2a}$$

بما ان الاساسات متشابهة ... الاسس متشابهة

$$3 = 2a \Longrightarrow a = 3/2$$

حل المعادلة الآتية

$$\log_3^{(2x+1)} = 2$$

$$2x+1 = 3^2$$

$$2x = 9-1$$

$$2x = 8 \Longrightarrow x = 4$$

أوجد قيمة المقدار الآتي دون استعمال الآلة الحاسبة

$(\log 2 = 0.3010 \ , \ \log 1 = 0)$

$$\log 64 - 3\log 2 - 2\log 4$$

$$= \log 2^6 - 3\log 2 - 2\log 2^2$$

$$= 6\log 2 - 3\log 2 - 4\log 2$$

$$= 6\log 2 - 7\log 2$$

$$= -\log 2$$

$$= \log 2^{-1} = \log^{1/2}$$

$$= \log 1 - \log 2 = 0 - \log 2$$

$$= -\log 2$$

$$= -0.3010$$

رياضيات بحتة ٤ ٢٠١٥/٥/٢ ٥ ساعة

الغايات وكيفية حسابها

مثال ① لتكن $f(x)=x^3+2x-9$ ماذا يحدث لهذه الدالة عندما تقترب x من العدد 1

$$\lim_{x\to 1}(x^3+2x-9)=-6$$

غاية $f(x)$ عندما تقترب x من 1 هي -6

$$f(1)=(1)^3+2-9=-6$$

تعريف: يقال إن غاية $f(x)$ عندما تقترب x من x_0 هي L وتكتب

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

إذا كان $f(x)$ تقترب من L إذا اقترب x من x_0 دون أن تساويها

ويمكن كتابتها أيضا بالشكل الآتي:

$$\lim f(x)=L$$

$x\to x_0$ كما يمثل الرسم عبارة (تقترب من)

مثال ② احسب $\lim_{x\to 3} 5(x^3-2x+6)$

$$\lim_{x\to 3} 5(x^3-2x+6)=5\lim_{x\to 3}(x^3-2x)$$

$$=5(27)-5=135$$

③ احسب $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=x+1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

١/٥/٥

⑥ احسب $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-2}$

$\lim_{x\to 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\lim_{x\to 3} (x^2-2) = 9-2 = 7$

$\therefore \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-2} = \frac{\lim_{x\to 3} \sqrt{x+1}}{\lim_{x\to 3} (x^2-2)} = \frac{2}{7}$

⑤ احسب $\lim_{x\to -1} (x^2-3)^{10}$

بما ان $\lim_{x\to -1} (x^2-3) = -2$

$\lim_{x\to -1} (x^2-3)^{10} = [\lim_{x\to -1}(x^2-3)][\lim_{x\to -1}(x^2-3)] \cdots [\lim_{x\to -1}(x^2-3)]$ (10 مرات)

$= (-2)(-2) \cdots\cdots (-2) = 1024$

⑦ احسب $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}$

$= \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+x}+2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

① $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-6x+8}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-6x+8} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-4)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-4}$$

$$= \frac{1}{2-4} = \frac{1}{-2}$$

② $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

③ $\lim_{x \to 5^-} \frac{x^2-25^-}{x+5^-}$

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{x^2-25}{x+5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x+5} = \lim_{x \to 5} (x-5)$$

$$= 5-5 = 0$$

1/0/3

4) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-5)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x - 5)$$

$$= 2 - 5 = -3$$

5) $\lim_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x \to -3} \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{-3+1} = -\frac{1}{2}$$

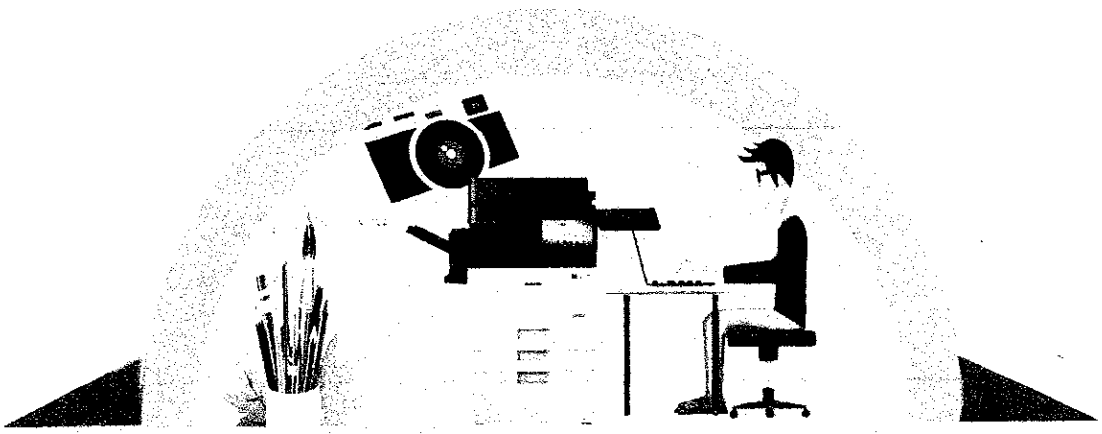
6) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x-1}$$

$$= \frac{-1-2}{-1-1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

7) $\lim_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$

$$= \lim_{x \to -5} \frac{(x+5)(x-2)}{x+5} = \lim_{x \to -5} (x - 2) = -5 - 2 = -7$$



مكتب المهندس

★★★★★

لكافة التقديمات الالكترونية

والاستنساخ وطبع كتب والملازم

صور سريعة **كبس هويات**

للاستفسار والمعلومات يرجى الاتصال على

07725773590 **07725756332**

العنوان حي العسكري٢/ السايدين - قرب جامع السيدة سداد البرزنجي
مقابل صيدلية كوردستان