الانحدار الخطي المتعدد

وصف البيانات Descriptive data

تتكون البيانات عادة من n من المشاهدات على المتغير التابع y و m من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, ..., X_m$ وترتب البيانات كما في الجدول التالي:

رقم المشاهدة	y_i	X_1	X_2	...	X_m
1	y_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1m}
2	y_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2m}
3	y_3	x_{31}	x_{32}	$\cdots$	x_{3m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	y_n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nm}

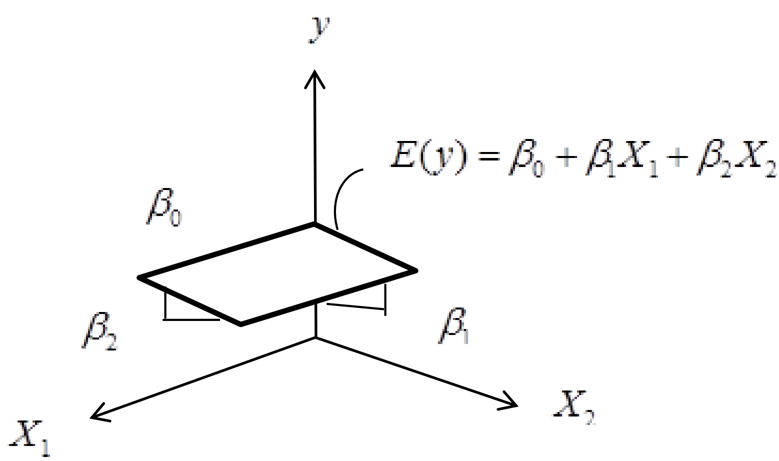
التمثيل ابياني

ان الشكل البياني لمعادلة الانحدار المتعدد الخطي هو سطح ذو ابعاد (m+1) حيث ان m هو عدد المتغيرات المستقلة. ففي حالة وجود متغيرين مستقلين (m=2) فان السطح الملائم للبيانات هو سطح ذو ثلاثة ابعاد تمثل النقاط $(x_{11}, x_{12}, y_1), (x_{21}, x_{22}, y_2), ..., (x_{n1}, x_{n2}, y_n)$ خير تمثيل، حيث ان (x_{i1}, x_{i2}, y_i) تمثل قيم X_1, X_2, y_i للمشاهدة i من العينة.

لذا فمعادلة الانحدار المتعدد في هذه الحالة هي سطح يمثل متوسط قيم y لمختلف قيم X_1, X_2 أي ان النموذج

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e_i$$

ويمكن تمثيلهُ بسطح ذو ثلاث ابعاد وكما هو موضح في الشكل (1).



الشكل (1) التمثيل البياني لمعادلة الانحدار بثلاث ابعاد

النموذج الرياضي

ان العلاقة الدالية بين المتغير y والمتغيرات المستقلة X_{is} في تحليل الانحدار المتعدد يمكن التعبير عنها بوصفها دالة خطية كالاتي:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_m x_{im} + e_i \quad , \; i = 1, 2, \ldots, n$$

اي ان:

$$y = X\beta + e$$

حيث ان:

y_i هي قيمة المتغير التابع او متغير الاستجابة.

$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}$ هي قيم ثابتة لـ m من المتغيرات المستقلة.

$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ هي ثوابت او معلمات معادلة الانحدار.

حيث ان :

β_0 هو موقع تقاطع مستوى الانحدار بالمحور y، وان β_0 تعطي متوسط الاستجابة عندما تكون قيم x_{is} تساوي صفر.

β_i معامل الانحدار الجزئي لـ y على X_i Partial Regression Coefficient عند جعل بقية المتغيرات المستقلة ثابتة. كما انها تمثل مقدار التغير في y لزيادة وحدة واحدة في X_i عندما تكون بقية المتغيرات المستقلة ثابتة.

e_i هو الخطأ العشوائي او المتبقي.

ان المعادلة السابقة تدعى متعددة لانها تحوي على اكثر من متغير مستقل وانها خطية لان كل من المعلمات $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m$ وكذلك المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, ..., X_m$ هي من الدرجة الأولى أي ان لها اساً يساوي الواحد الصحيح.

فروض التحليل Assumptions

1- ان المتغير المعتمد y هو متغير عشوائي وقيمهُ مستقلة احصائياً الواحدة عن الأخرى وتتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي قدرهُ $\mu_{y/x_1,\ldots,x_m}$ وتباين $\sigma^2_{y/x_1,\ldots,x_m} = \sigma^2$ أي ان متوسط y هو دالة خطية

$$\mu_{y/X_1,\ldots,X_m} = E(y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_m X_m$$

وان تباين y هو

$$\sigma^2_{y/X_1,\ldots,X_m} = \sigma^2_{\beta_0+\beta_1 X_1+\beta_2 X_2+\ldots+\beta_m X_m} = \sigma^2_e = \sigma^2_I$$

ان هذه الخاصية تسمى Homoscedasticity أي تجانس الخطأ.

2- ان حد الخطأ e_i هو خطأ عشوائي يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي قدرهُ صفر أي $E(e) = 0$ وتباين قدرهُ $\sigma^2_e = \sigma^2_I$ أي: $E(e'e) = \sigma^2_I$.

ان التباين المشترك بين $\text{cov}(e_i e_i') = 0$ لأننا نفرض عدم وجود ارتباط بين قيم e_i .

3- عدم وجود علاقة خطية محددة او تامة بين المتغيرات المستقلة.

تقدير المعلمات بطريقة المربعات الصغرى

ان أساس عمل طريقة المربعات الصغرى هو جعل مجموع مربعات البواقي او الخطأ اقل ما يمكن:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_m X_{im} + e_i$$
$$e_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_m X_{im})$$

وصولاً الى المعادلات الطبيعية.

بذلك يتكون لدينا متجه معلمات الانحدار المقدرة والذي يأخذ الصيغة الاتية:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

حيث ان:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad X'y = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1} y_i \\ \sum x_{i2} y_i \\ \vdots \\ \sum x_{im} y_i \end{bmatrix}$$

$$\therefore X'X=\begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} & \cdots & \sum X_{im} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} & \cdots & \sum X_{i1}X_{im} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}X_{i1} & \sum X_{i2}^2 & \cdots & \sum X_{i2}X_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum X_{im} & \sum X_{im}X_{i1} & \sum X_{im}X_{i2} & \cdots & \sum X_{im}^2 \end{bmatrix}$$

في حالة كان لدينا متغير واحد مستقل يمكن كتابة المعادلات الطبيعية بصيغة المصفوفات كما يلي:

$$X'y = X'X\,b$$

أي ان

$$X'X\,b = X'y$$

$$X'X=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & X_{11} \\ 1 & X_{21} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 \end{bmatrix}$$

وان:

$$X'y=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum X_{i1}y_i \end{bmatrix}$$

بذلك يمكن كتابة المعادلات الطبيعية باستخدام المصفوفات ولـ m من المتغيرات المستقلة وكما يلي:

$$X'X\,b = X'y$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} & \cdots & \sum X_{im} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} & \cdots & \sum X_{i1}X_{im} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}X_{i1} & \sum X_{i2}^2 & \cdots & \sum X_{i2}X_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum X_{im} & \sum X_{im}X_{i1} & \sum X_{im}X_{i2} & \cdots & \sum X_{im}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum X_{i1}y_i \\ \sum X_{i2}y_i \\ \vdots \\ \sum X_{im}y_i \end{bmatrix}$$

بضرب الطرفين بالمصفوفة $(X'X)^{-1}$ نحصل على:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$$

حيث يرمز للمصفوفة $(X'X)^{-1}$ بالرمز C أي ان:

$$(X'X)^{-1} = C$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & \cdots & C_{0m} \\ C_{10} & C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ C_{20} & C_{21} & \cdots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m0} & C_{m1} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix}_{(m+1)(m+1)}$$

أي ان:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & \cdots & C_{0m} \\ C_{10} & C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ C_{20} & C_{21} & \cdots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m0} & C_{m1} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum X_{i1} y_i \\ \sum X_{i2} y_i \\ \vdots \\ \sum X_{im} y_i \end{bmatrix}$$

هناك طريقة أخرى لكتابة المعادلات الطبيعية باستخدام مجموع المربعات ومجموع حاصل الضرب المصحح. وفي هذه الطريقة فان:

$$X_i = \begin{bmatrix} (x_{11}-\bar{X}_1) & (x_{12}-\bar{X}_2) & \cdots & (x_{1m}-\bar{X}_m) \\ (x_{21}-\bar{X}_1) & (x_{22}-\bar{X}_2) & \cdots & (x_{2m}-\bar{X}_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{n1}-\bar{X}_1) & (x_{n2}-\bar{X}_2) & \cdots & (x_{nm}-\bar{X}_m) \end{bmatrix}$$

لنرمز لمجموع المربعات المصحح $S_{X_iX_i}$ بـ S_{ii} للسهولة ولمجموع حاصل الضرب المصحح $S_{X_iX_j}$ بـ S_{ij} ولمجموع حاصل الضرب المصحح S_{X_iy} بـ S_{iy}

$$S_{ii} = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}$$

$$S_{ij} = \sum X_i X_j - \frac{(\sum X_i)(\sum X_j)}{n}$$

$$S_{iy} = \sum X_i y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum y_i)}{n}$$

لذا فان المصفوفة $X_c'X_c$ (المصححة) ستكون:

$$X_c'X_c = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1m} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mm} \end{bmatrix}$$

$$y_c = \begin{bmatrix} (y_1-\bar{y}) \\ (y_2-\bar{y}) \\ \vdots \\ (y_n-\bar{y}) \end{bmatrix} \;,\; X_c'y_c = \begin{bmatrix} S_{1y} \\ S_{2y} \\ \vdots \\ S_{my} \end{bmatrix}$$

اذن متجه المعلمات المقدر المصحح هو:

$$\tilde{\beta} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_m \end{bmatrix} = (X_c'X_c)^{-1} X_c'y_c$$

حيث ان

$$(X_c{}'X_c)^{-1} = \tilde{C}$$

where

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix}$$

المقارنة بين الطريقتين:

1- حجم المصفوفة $X'X$ هو (m+1)(m+1) اما حجم المصفوفة $X_c{}'X_c$ هو (m×m) بذلك فان عملية إيجاد المعكوس اسهل.

2- عناصر المصفوفة $\tilde{C}$ هي نفس C (بعد حذف الصف الأول والعمود الأول من C).

3- ان قيم $\hat{\beta}$ هي نفس قيم $\tilde{\beta}$ (بعد حذف β_0 من المتجه $\hat{\beta}$).

الطريقة سوف يتم اتباعها في محاضراتنا هي الطريقة غير المصححة.

<u>خواص مقدرات المربعات الصغرى</u>

1- ان $\hat{\beta}$ هو تقدير غير متحيز لـ β.

البرهان:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y \\ &= (X'X)^{-1}X'(X\beta + e) \\ &= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'e \end{aligned}$$

$$E(\hat{\beta}) = E(\beta) + (X'X)^{-1}X'E(e)$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

2- ان مصفوفة التباين والتباين المشترك لـ $\hat{\beta}$ هو $V(\hat{\beta})$ ويساوي:

$$V(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} = \hat{\sigma}^2 C$$

حيث ان

$$C = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & \cdots & C_{0m} \\ C_{10} & C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ C_{20} & C_{21} & \cdots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m0} & C_{m1} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix}_{(m+1)(m+1)}$$

ويمكن برهنة تباين متجه المعلمات المقدر كما يأتي:

$$V(\hat{\beta}) = E\left[(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))\ (\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))'\right]$$

بما ان:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

وان:

$$E(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'E(y)$$

فان:

$$V(\hat{\beta}) = E\left[(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))\ (\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))'\right]$$

$$= E((X'X)^{-1}X'y - (X'X)^{-1}X'E(y))\ ((X'X)^{-1}X'y - (X'X)^{-1}X'E(y))'$$

نستخرج $(X'X)^{-1}X'$ كعامل مشترك لكل قوس نحصل على:

$$= E((X'X)^{-1}X'(y - E(y))\ ((X'X)^{-1}X'(y - E(y))'$$

بما ان $e = (y - \hat{y})$ وهي نفسها $e = (y - E(y))$، بذلك فان:

$$= E((X'X)^{-1}X'e)\ ((X'X)^{-1}X'e)'$$

وبأخذ المنقول للقوس الثاني نحصل على:

$$= E((X'X)^{-1}X'e)\ ((e'X(X'X)^{-1})$$

بإدخال التوقع بعد ضرب القوسين نحصل على:

$$= (X'X)^{-1}X'E(ee')X(X'X)^{-1})$$

وبما ان $E(ee') = \sigma^2$ بذلك فان:

$$= \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$$

وبما ان $(X'X)^{-1}X'X = I$ اذاً:

$$V(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$$

3- تقدير تباين المجتمع

Proof:

بما ان :

$$SSe = e'e$$

وان $e = (y - X\beta)$، بذلك فان :

$$SSe = (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

وبأخذ المنقول للقوس الأول نحصل على:

$$\begin{aligned} SSe &= (y-\beta' X')(y-X\beta) \\ &= (y'y-\beta' X' y - y' X\beta + \beta' X' X\beta) \end{aligned}$$

وبما ان $\beta' X' y = y' X\beta$ فان:

$$SSe = (y'y - 2\beta' X' y + \beta' X' X\beta)$$

وبما ان $X' X\beta = X' y$ بذلك فان:

$$SSe = (y'y - 2\beta' X' y + \beta' X' y)$$

وبطرح الحد الثاني من الحد الثالث نحصل على:

$$SSe = y'y - \beta' X' y$$

حيث ان SSe هو مجموع مربعات الخطأ.

اما درجات الحرية لمجموع مربعات الخطأ هي (n−m−1)، حيث ان m هي عدد المتغيرات المستقلة في النموذج، اما الواحد فلمقصود به المعلمة β_0 .

اما متوسط مربعات الخطأ فانهُ يساوي:

$$Mse = \hat{\sigma}^2 = \frac{SSe}{n-m-1} = \frac{y'y - \beta' X' y}{n-m-1}$$

مثال: من خلال البيانات ادناه والمتمثلة بمتغيرين مستقلين ومتغير تابع جد ما يلي:

1- معادلة خط الانحدار للبيانات ادناه

2- جد تباين المعلمات المقدرة $V(\hat{\beta})$

X_2	X_1	y
1	3	6
2	5	5
5	4	8
7	9	7
9	2	6
8	1	2

الحل: 1- تقدير معلمات خط الانحدار باستخدام الصيغة الاتية:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

يتم ترتيب المتغيرين المستقلين في مصفوفة وكما يلي:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نجد في بادئ الامر مصفوفة $(X'X)$ المتجه $X'y$ وكما يلي:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}X_{i1} & \sum X_{i2}^2 \end{bmatrix}, \; X'y = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i \end{bmatrix}$$

نجد حاصل ضرب المتغيرات فيما بينها وكما يلي:

y^2	$X_2 y$	$X_1 y$	X_2^2	X_1^2	$X_1 X_2$	X_2	X_1	y	المشاهدة
36	6	18	1	9	3	1	3	6	1
25	10	25	4	25	10	2	5	5	2
64	40	32	25	16	20	5	4	8	3
49	49	63	49	81	63	7	9	7	4
36	54	12	81	4	18	9	2	6	5
4	16	2	64	1	8	8	1	2	6
214	175	152	224	136	122	32	24	34	المجموع

نعوض هذه المجاميع في المصفوفة $(X'X)$ والمتجه $X'y$ وكما يلي:

$$(X'X)=\begin{bmatrix} 6 & 24 & 32 \\ 24 & 136 & 122 \\ 32 & 122 & 224 \end{bmatrix},\ X'y=\begin{bmatrix} 34 \\ 152 \\ 175 \end{bmatrix}$$

وبذلك يكون متجه المعلمات المقدرة هو كما يلي:

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}=(X'X)^{-1}X'y=\begin{bmatrix} 6 & 24 & 32 \\ 24 & 136 & 122 \\ 32 & 122 & 224 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 34 \\ 152 \\ 175 \end{bmatrix}$$

يتم إيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$ ومن ثم ضرب المصفوفة الناتجة بالمتجه $X'y$ وكما يلي:

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix} 1.238 & -0.1169 & -0.1131 \\ -0.1169 & 0.0254 & 0.00286 \\ -0.1131 & 0.00286 & 0.01907 \end{bmatrix}$$

بذلك يكون متجه المعلمات كالاتي:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y=\begin{bmatrix} 1.238 & -0.1169 & -0.1131 \\ -0.1169 & 0.0254 & 0.00286 \\ -0.1131 & 0.00286 & 0.01907 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 34 \\ 152 \\ 175 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4.5117 \\ 0.3889 \\ -0.075 \end{bmatrix}$$

بذلك تكون معادلة خط الانحدار المقدرة هي كما يلي:

$$\hat{y}_i=4.5117+0.3889X_1-0.075X_2$$

2-جد تباين المعلمات المقدرة $V(\hat{\beta})$

ان صيغة تباين المعلمات المقدرة هي:

$$V(\hat{\beta})=\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$$

ان تباين المجتمع المقدر هو :

$$\hat{\sigma}^2 = MSe = \frac{y'y - \hat{\beta}'X'y}{n-m-1}$$

$$y'y = \sum y_i^2 = 214$$

$$\hat{\beta}'X'y = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum X_i y_i \\ \sum X_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}'X'y = \begin{bmatrix} 4.5117 & 0.887 & -0.075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 \\ 152 \\ 175 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}'X'y = 199.3617$$

بذلك فان:

$$\hat{\sigma}^2 = MSe = \frac{y'y - \hat{\beta}'X'y}{n-m-1} = \frac{214 - 199.3617}{6-2-1} = 4.879$$

وتباين المجتمع المقدر:

$$V(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$$

$$= 4.879 \begin{bmatrix} 1.238 & -0.1169 & -0.1131 \\ -0.1169 & 0.0254 & 0.00286 \\ -0.1131 & 0.00286 & 0.01907 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6.0405 & -0.5707 & -0.5521 \\ -0.5707 & 0.12406 & 0.01395 \\ -0.5521 & 0.01395 & 0.09305 \end{bmatrix}$$

بذلك فان

$$S_{\hat{\beta}}^2 = Mse \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= 4.879 \begin{bmatrix} 1.238 & -0.1169 & -0.1131 \\ -0.1169 & 0.0254 & 0.00286 \\ -0.1131 & 0.00286 & 0.01907 \end{bmatrix}$$

$$S_{\hat{\beta}}^2 = \begin{bmatrix} 6.0405 & -0.5707 & -0.5521 \\ -0.5707 & 0.12406 & 0.01395 \\ -0.5521 & 0.01395 & 0.09305 \end{bmatrix}$$

بذلك فان تباينات المعاملات المقدرة تكون كما يلـي:

$$S^2_{\hat{\beta}_0} = 6.0405$$
$$S^2_{\hat{\beta}_1} = 0.12406$$
$$S^2_{\hat{\beta}_2} = 0.09305$$

اما التبانين المشترك بين المعلمات المقدرة فيتم ايجادهُ كما يلـي:

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) - 0.5707$$
$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2) - 0.5521$$
$$Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = 0.01395$$

كما يمكن حساب تباينات المعاملات المقدرة باستخدام المصفوفة C و Mse وكما يلـي:

$$S^2_{\hat{\beta}_0} = Mse\,C_{00} \ , \ S^2_{\hat{\beta}_1} = Mse\,C_{11} \ , S^2_{\hat{\beta}_2} = Mse\,C_{22}$$

أي ان:

$$S^2_{\hat{\beta}_0} = Mse * C_{00} = (4.879) * (1.238) = 6.0405 \ ,$$
$$S^2_{\hat{\beta}_1} = Mse * C_{11} = (4.879) * (0.0254) = 0.12406 \ ,$$
$$S^2_{\hat{\beta}_2} = Mse * C_{22} = (4.879) * (0.01907) = 0.09305 \ ,$$

كما يمكن حساب التبانين المشترك بين المعلمات المقدرة باستخدام المصفوفة C و Mse وكما يلـي:

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = Mse\,C_{01} \ , \ Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2) = Mse\,C_{02} \ , \ Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = Mse\,C_{12}$$

أي ان:

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = Mse * C_{01} = (4.879) * (-0.11697) = -0.5707$$
$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2) = Mse * C_{02} = (4.879) * (-0.1131) = -0.5521$$
$$Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = Mse * C_{12} = (4.879) * (0.00286) = 0.01395$$

جدول تحليل التباين

في حالة كان النموذج الخطي يتكون من عدة متغيرات مستقلة او m من المتغيرات المستقلة والذي يكون على شكل مصفوفات، يكون جدول تحليل التباين في هذه الحالة كما يأتي:

S.O.V	d.f	S.S	M.S	Fcal.
$R(X_1, X_2, ..., X_m)$	m	$\hat{\beta}'X'y - n\bar{y}^2$	$M.S.R$	$\frac{M.S.R}{M.S.e}$
$Error\,(X_1, X_2, ..., X_m)$	$n-m-1$	$SST - SSR$	$M.S.e$	
$Total$	$n-1$	$y'y - n\bar{y}^2$		

الفرضية التي سيتم اختبارها هي:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq ... \neq \beta_m \neq 0$$

تفسير فرضية العدم: لا يوجد أي متغير يفسر التغيرات الحاصلة في y.

تفسير الفرضية البديلة: على الأقل هناك متغير واحد لهُ أهمية في تفسير التغيرات الحاصلة في y.

مثال: من خلال بيانات المثال السابق كون جدول تحليل التباين لاختبار الفرضية الاتية:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$$

X_2	X_1	y
1	3	6
2	5	5
5	4	8
7	9	7
9	2	6
8	1	2

الحل: في بادئ الامر نكتب جدول تحليل التباين مع الصيغ الحسابية لهُ وكما يلي:

S.O.V	d.f	S.S	M.S	Fcal.
$R(X_1, X_2, ..., X_m)$	m	$\hat{\beta}'X'y - n\bar{y}^2$	$M.S.R$	$\frac{M.S.R}{M.S.e}$
$Error\,(X_1, X_2, ..., X_m)$	$n-m-1$	$SST - SSR$	$M.S.e$	
$Total$	$n-1$	$y'y - n\bar{y}^2$		

يتم حساب مجموع مربعات الانحدار وكما يلي:

$$SSR(X_1X_2) = \hat{\beta}'X'y - n\bar{y}^2$$

نجد حاصل ضرب المتغيرات فيما بينها وكما يلي:

y^2	X_2y	X_1y	X_2^2	X_1^2	X_1X_2	X_2	X_1	y	المشاهدة
36	6	18	1	9	3	1	3	6	1
25	10	25	4	25	10	2	5	5	2
64	40	32	25	16	20	5	4	8	3
49	49	63	49	81	63	7	9	7	4
36	54	12	81	4	18	9	2	6	5
4	16	2	64	1	8	8	1	2	6
214	175	152	224	136	122	32	24	34	المجموع

$$SSR(X_1X_2) = \hat{\beta}'X'y = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum X_i y_i \\ \sum X_i y_i \end{bmatrix} - n\bar{y}^2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{34}{6} = 5.66$$

$$SSR(X_1X_2) = \hat{\beta}'X'y = \begin{bmatrix} 4.5117 & 0.887 & -0.075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 \\ 152 \\ 175 \end{bmatrix} - (6)(5.66)^2 = 6.7017$$

$$SST = y'y - n\bar{y}^2$$

حيث ان:

$$y'y = \sum y_i^2 = 214$$

بذلك فان مجموع المربعات الكلي سيكون:

$$\begin{aligned} SST &= y'y - n\bar{y}^2 \\ &= 214 - (6)(5.66)^2 \\ &= 21.34 \end{aligned}$$

اما مجموع المربعات الخطأ فسيكون:

$$\begin{aligned} SSe &= SST - SSR(X_1X_2) \\ &= 21.34 - 6.7017 \\ &= 14.6383 \end{aligned}$$

بذلك يكون جدول تحليل التباين كما يأتي:

S.O.V	d.f	S.S	M.S	$F_{cal.}$
$R(X_1, X_2)$	$m=2$	6.7017	3.35	0.6866
$Error\,(X_1, X_2)$	$n-m-1$ $6-2-1=3$	14.638	4.879	
$Total$	$n-1$ $6-1=5$	21.34		

وبذلك تم إيجاد قيمة F المحسوبة والتي كانت 0.6866. اما قيمة F الجدولية فكانت:

$$F(0.05, 2, 3) = 9.55$$

وبالمقارنة بين القيمتين نحصل على:

$$F_{cal.} = 0.6866 < F(0.05, 2, 3) = 9.55$$

اذا تقبل فرضية العدم وترفض الفرضية البديلة، أي ان كلا المتغيرين $X_1 X_2$ لا يؤثران على المتغير y.

مُعامل الارتباط المتعدد

يقصد بمعامل الارتباط المتعدد هو مقياس للعلاقة بين قيم y المشاهدة وقيم y المتوقعة أي $\hat{y}$ ، ويرمز لهُ بـ R أي ان:

$$R = r_{y\hat{y}} = \frac{S_{y\hat{y}}}{\sqrt{S_{yy}S_{\hat{y}\hat{y}}}} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2 \sum(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2}}$$

ان معامل الارتباط بين y و $\hat{y}$ هو معامل ارتباط بسيط بين y و $\hat{y}$ ولكن يطلق عليهِ متعدد لان $\hat{y}$ جاءت من عدة قيم لـ X.

ان مربع معامل الارتباط المتعدد هو نفسهُ معامل التحديد R^2 حيث ان R^2 تأخذ الصيغة الاتية:

$$R^2 = \frac{SS\ due\ to\ Regression}{SS\ Total}$$

ويمكن البرهنة على ان $R^2 = r_{y\hat{y}}^2$ وكما يلي:

$$r_{y\hat{y}}^2 = \left[\frac{S_{y\hat{y}}}{\sqrt{S_{yy}S_{\hat{y}\hat{y}}}}\right]^2 = \frac{S_{y\hat{y}}^2}{S_{yy}S_{\hat{y}\hat{y}}}$$

من خلال البسط:

$$S_{y\hat{y}}^2 = \left[\sum(y_i - \bar{y})\,(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})\right]^2$$

بما ان $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ فان:

$$S_{y\hat{y}}^2 = \left[\sum (y_i - \bar{y})\,(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i - \bar{\hat{y}})\right]^2$$

بما ان $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ بذلك فان:

$$S_{y\hat{y}}^2 = \left[\sum (y_i - \bar{y})\,(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} + \hat{\beta}_1 X_i - \bar{\hat{y}})\right]^2$$

بما ان $\sum y_i = \sum \hat{y}_i$ بذلك فان:

$$S_{y\hat{y}}^2 = \left[\sum(y_i - \bar{y})\,(\cancel{\bar{y}} - \hat{\beta}_1 \bar{X} + \hat{\beta}_1 X_i - \cancel{\bar{\hat{y}}})\right]^2$$

وباخذ $\hat{\beta}_1$ عامل مشترك نحصل على:

$$S_{y\hat{y}}^2 = \left[\sum (y_i - \bar{y})\left(\hat{\beta}_1 (X_i - \bar{X}\right)\right]^2$$

أي ان:

$$S_{y\hat{y}}^2 = \left[\hat{\beta}_1 \sum (y_i - \bar{y})\,(X_i - \bar{X})\right]^2$$

$$S_{y\hat{y}}^2 = \left[\hat{\beta}_1 S_{Xy}\right]^2 = [SS\ due\ to\ Regression]^2$$

$$\therefore S_{y\hat{y}} = SSR(X_1)$$

من خلال المقام:

$$S_{\hat{y}\hat{y}} = \sum (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2 = \sum (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} + \hat{\beta}_1 X_i - \bar{\hat{y}})^2$$

بنفس الأسلوب وبعد التعويض عن $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ وعن $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ واخذ $\hat{\beta}_1$ عامل مشترك نحصل على:

$$S_{\hat{y}\hat{y}} = \sum (\cancel{\bar{y}} - \hat{\beta}_1 \bar{X} + \hat{\beta}_1 X_i - \cancel{\bar{\hat{y}}})^2$$

$$S_{\hat{y}\hat{y}} = \sum \left(\hat{\beta}_1 (X_i - \bar{X})\right)^2 = \hat{\beta}_1^2 \sum (X_i - \bar{X})^2 = \hat{\beta}_1^2 S_{XX} = SS\ due\ to\ Regression$$

$$S_{y\hat{y}} = S_{\hat{y}\hat{y}} = SSR = SS\ due\ to\ Regression$$

$$\therefore r_{y\hat{y}}^2 = \left[\frac{S_{y\hat{y}}^2}{\sqrt{S_{yy} S_{\hat{y}\hat{y}}}}\right]^2 = \frac{S_{y\hat{y}}^2}{S_{yy} S_{\hat{y}\hat{y}}} = \frac{[SS\ due\ to\ Regressio\cancel{n}]^2}{SS\ Total \qquad \cancel{SS\ due\ to\ Regression}}$$

$$\therefore r_{y\hat{y}}^2 = \frac{SS\ due\ to\ Regression}{SS\ Total} = R^2$$

$$\therefore R^2 = r_{y\hat{y}}^2$$

$$\therefore R = r_{y\hat{y}}$$

$$\therefore \quad 0 \le R^2 = r_{y\hat{y}}^2 \le 1 \to 0 \le r_{y\hat{y}} \le 1$$

أي ان معامل الارتباط المتعدد هو الجذر التربيعي لمعامل التحديد R^2 بذلك فأن عندما يكون النموذج مطابقاً للبيانات فأن قيمة R^2 تقترب من الواحد الصحيح أي ان القيم المشاهدة y والمتوقعة $\hat{y}$ تكون متقاربة جداً.

ان تفسير معامل التحديد هو ما يفسرهُ أهمية النموذج الرياضي في وصف العلاقة بين X و y ليعطي نسبة ما تفسره هذه العلاقة من خلال النموذج للمتغيرات الحاصلة في y.

في الانحدار الخطي البسيط يكون لدينا:

$$r_{y\hat{y}} = r_{Xy}$$

ويمكن اثبات ذلك وكما يلي:

$$r_{y\hat{y}} = \frac{S_{y\hat{y}}}{\sqrt{S_{yy}S_{\hat{y}\hat{y}}}} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{(S_{yy})\sum(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2}}$$

وبنفس الأسلوب وبعد التعويض عن $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ وعن $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ واخذ $\hat{\beta}_1$ عامل مشترك في البسط والمقام نحصل على:

$$r_{y\hat{y}} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})(\cancel{\bar{y}} + \hat{\beta}_1(X_i - \bar{X}) - \cancel{\bar{\hat{y}}})}{\sqrt{(S_{yy})\sum(\cancel{\bar{y}} + \hat{\beta}_1(X_i - \bar{X}) - \cancel{\bar{\hat{y}}})^2}}$$

$$r_{y\hat{y}} = \frac{\hat{\beta}_1 \sum(y_i - \bar{y})(X_i - \bar{X})}{\sqrt{\hat{\beta}_1^2 S_{yy} \sum(X_i - \bar{X})^2}} = \frac{\hat{\beta}_1 S_{Xy}}{\sqrt{\hat{\beta}_1^2 [S_{yy}\ S_{XX}]}}$$

$$r_{y\hat{y}} = \frac{\cancel{\hat{\beta}_1} S_{Xy}}{\cancel{\hat{\beta}_1}\sqrt{[S_{yy}\ S_{XX}]}}$$

$$\therefore r_{y\hat{y}} = \frac{S_{Xy}}{\sqrt{[S_{yy}\ S_{XX}]}} = r_{Xy}$$

$$\therefore R = r_{y\hat{y}} = |r_{Xy}|$$

$$\therefore R^2 = r_{y\hat{y}}^2 = r_{Xy}^2$$

مُعامل الارتباط الجزئي

يعرف معامل الارتباط الجزئي بأنهُ مقياس العلاقة الخطية بين متغيرين بعد تثبيت تأثير المتغيرات الأخرى.

ان معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرين i و j بعد جعل المتغير k ثابتاً هو :

$$r_{ij.k} = \frac{r_{ij} - r_{ik}r_{jk}}{\sqrt{(1-r_{ik}^2)(1-r_{jk}^2)}}$$

حيث ان r_{ij} هو معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين i و j.

اما $r_{ij.k}$ فهو معامل الارتباط الجزئي من الدرجة الأولى.

اما معامل الارتباط الجزئي (من الدرجة الثانية) بين المتغيرين i و j بعد جعل تأثير بقية المتغيرات L وK ثابتة هو:

$$r_{ij.kL} = \frac{r_{ij.k} - r_{iL.k}r_{jL.k}}{\sqrt{(1-r_{iL.k}^2)(1-r_{jL.k}^2)}}$$

او يمكن ان يكون:

$$r_{ij.kL} = \frac{r_{ij.L} - r_{ik.L}r_{jk.L}}{\sqrt{(1-r_{ik.L}^2)(1-r_{jk.L}^2)}}$$

مُعامل الانحدار الجزئي القياسي

ان مُعامل الانحدار الجزئي القياسي ويرمز لهُ بـ $\hat{\beta}_i^*$ هو معامل الانحدار الجزئي عندما يكون شكل قياسي او معياري.

عندما يكون هناك ارتباط بين المتغيرين X1 و X2 جاء من التباين للقيم X1 وX2 فانه لا نستطيع الحكم على أي منها يؤثر بشكل اكبر على النموذج الا اذا الغينا هذا الارتباط بتحويل كل متغير الى متغير قياسي. ومن اجل تحويل المتغير الى متغير قياسي نستخدم الصيغة الاتية:

$$X_i^* = \frac{X_i - \bar{X}}{S_{xi}}$$

وللمتغير y بالصيغة الاتية:

$$y_i^* = \frac{y_i - \bar{y}}{S_y}$$

حيث ان:

$$S_{xi} = \sqrt{S_{xi}^2} = \sqrt{\frac{S_{xi\,xi}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}}{n-1}}$$

$$S_{yi} = \sqrt{S_{yi}^2} = \sqrt{\frac{S_{yi\,yi}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}}{n-1}}$$

بذلك فان متجه المعلمات القياسية يكون:

$$\hat{\beta}^* = (X^{*\prime} X^*)^2 X^{*\prime} y^*$$

كذلك يمكن الحصول على معامل الانحدار الجزئي القياسي من معامل الانحدار الجزئي من خلال العلاقة الاتية:

$$\hat{\beta}_i^* = \hat{\beta}_i \left(\frac{S_{xi}}{S_{yi}}\right)$$

كذلك يمكن الحصول على معامل الانحدار الجزئي من معامل الانحدار الجزئي القياسي من خلال العلاقة الاتية:

$$\hat{\beta}_i = \hat{\beta}_i^* \left(\frac{S_{yi}}{S_{xi}}\right)$$

مثال:

إذا كانت لديك البيانات الاتية، جد ما يلي:

1- قدر معادلة الانحدار ثم كون جدول تحليل التباين.
2- معامل التحديد.
3- معامل الارتباط المتعدد.
4- معامل الارتباط الجزئي بين X1 وX3 بثباتX2 (معامل ارتباط جزئي من الدرجة الأولى).
5- معامل الارتباط الجزئي بين X1 وX3 بثباتX2 وX4 (معامل ارتباط جزئي من الدرجة الثانية).
6- معامل الانحدار الجزئي القياسي من خلال:
   i) من خلال معامل الانحدار الجزئي.
   ii) من خلال البيانات.

الحل:

1- قدر معادلة الانحدار ثم كون جدول تحليل التباين.

من خلال البيانات يلاحظ ان هناك أربع متغيرات مستقلة وهما X1 و2X و3X وX4 بذلك فانهُ لدينا نموذج انحدار متعدد. ولتكوين معادلة خط الانحدار نستخدم الصيغة الاتية:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

نكون المصفوفة $(X'X)$ وكما يلي:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} & \sum X_{i3} & \sum X_{i4} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i3} & \sum X_{i1}X_{i4} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}X_{i1} & \sum X_{i2}^2 & \sum X_{i2}X_{i3} & \sum X_{i2}X_{i4} \\ \sum X_{i3} & \sum X_{i3}X_{i1} & \sum X_{i3}X_{i2} & \sum X_{i3}^2 & \sum X_{i3}X_{i4} \\ \sum X_{i4} & \sum X_{i4}X_{i1} & \sum X_{i4}X_{i2} & \sum X_{i4}X_{i3} & \sum X_{i4}^2 \end{bmatrix}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i \\ \sum x_{i3}y_i \\ \sum x_{i4}y_i \end{bmatrix}$$

نعد جدول لحساب قيم المصفوفة $(X'X)$ والمتجه $(X'y)$وكما يلي:

المشاهدة	y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2X_3	X_2X_4	X_3X_4
1	3	4	6	10	1	24	40	4	60	6	10
2	6	5	7	8	4	35	40	20	56	28	32
3	8	3	8	2	2	24	6	6	16	16	4
4	9	4	3	4	5	12	16	20	12	15	20
5	4	3	2	6	4	6	18	12	12	8	24
6	2	5	1	3	3	5	15	15	3	3	9
المجموع	32	24	27	33	19	106	135	77	159	76	99

X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_1y	X_2y	X_3y	X_4y	y^2
16	36	100	1	12	18	30	3	9
25	49	64	16	30	42	48	24	36
9	64	4	4	24	64	16	16	64
16	9	16	25	36	27	36	45	81
9	4	36	16	12	8	24	16	16
25	1	9	9	10	2	6	6	4
100	163	229	71	124	161	160	110	210

$$(X'X)=\begin{bmatrix} 6 & 24 & 27 & 33 & 19 \\ 24 & 100 & 106 & 135 & 77 \\ 27 & 106 & 163 & 159 & 76 \\ 33 & 135 & 159 & 229 & 99 \\ 19 & 77 & 76 & 99 & 71 \end{bmatrix} \quad X'y=\begin{bmatrix} 32 \\ 124 \\ 161 \\ 160 \\ 110 \end{bmatrix}$$

بعد إيجاد معكوس مصفوفة (X’X) نجد متجه المعلمات المقدرة وكما يلي:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$$

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix} 6.836 & -0.972 & -0.243 & -0.0517 & -0.4423 \\ -0.972 & 0.2811 & 0.0135 & -0.0237 & -0.02611 \\ -0.243 & 0.0135 & 0.0314 & -0.005 & 0.023776 \\ -0.0517 & -0.0237 & -0.005 & 0.0248 & 0.01 \\ -0.4423 & -0.02611 & 0.023776 & 0.01 & 0.1208 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ 124 \\ 161 \\ 160 \\ 110 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix} 2.078 \\ -0.739 \\ 0.767 \\ -0.298 \\ 1.389 \end{bmatrix}$$

أي ان معادلة الانحدار المقدرة هي:

$$\hat{y}_i = 2.078 - 0.739X_{i1} + 0.767X_{i2} - 0.298X_{i3} + 1.389X_{i4}$$

نكون الان جدول تحليل التباين:

S.O.V	d.f	S.S	M.S	Fcal.
$R(X_1, X_2, \ldots, X_m)$	m	$\hat{\beta}'X'y - n\bar{y}^2$	$M.S.R$	$\frac{M.S.R}{M.S.e}$
$Error(X_1, X_2, \ldots, X_m)$	$n-m-1$	$SST - SSR$	$M.S.e$	
$Total$	$n-1$	$y'y - n\bar{y}^2$		

الفرضية التي سيتم اختبارها هي:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$
$H_1: \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \beta_4$

تفسير فرضية العدم: لا يوجد أي متغير يفسر التغيرات الحاصلة في y.

تفسير الفرضية البديلة: على الأقل هناك متغير واحد لهُ أهمية في تفسير التغيرات الحاصلة في y.

يتم حساب مجاميع المربعات كما في المثال السابق وادراجها في جدول تحليل التباين وكما يلي:

S.O.V	d.f	S.S	M.S	Fcal.
$R(X_1, X_2, X_3, X_4)$	4	32.83	8.209	1.263
$Error(X_1, X_2, X_3, X_4)$	1	6.496	6.496	
$Total$	5	39.33		

$F(0.05,4,1) = 224.58$

وبالمقارنة بين القيمتين نحصل على:

$F_{cal.} = 1.263 < F(0.05,4,1) = 224.58$

إذا تقبل فرضية العدم وترفض الفرضية البديلة، أي ان المتغيرات X1,X2,X3,X4 ليس لها تأثير معنوي على المتغير y.

2- معامل التحديد.

$$R^2 = \frac{SS\ due\ to\ Regression}{SS\ Total}$$

$$R^2 = \frac{32.83}{39.33} = 0.834$$

3- معامل الارتباط المتعدد.

$$r_{y\hat{y}} = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.834} = 0.913$$

4- معامل الارتباط الجزئي بين X1 وX3 بثباتX2 (معامل ارتباط جزئي من الدرجة الأولى).

$$r_{ij.k} = \frac{r_{ij} - r_{ik}r_{jk}}{\sqrt{(1 - r_{ik}^2)(1 - r_{jk}^2)}}$$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{32}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{32}^2)}}$$

نجد معامل الارتباط البسيط بين X1,X3 وكما يلي:

$$r_{X1X3} = \frac{S_{X1X3}}{\sqrt{S_{X1X1}S_{X3X3}}} = \frac{\sum(X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{i3} - \bar{X}_3)}{\sqrt{(\sum X_{i1}^2 - \frac{(\sum X_{i1})^2}{n})(\sum X_{i3}^2 - \frac{(\sum X_{i3})^2}{n})}} = \frac{3}{\sqrt{(4)(47.5)}} = 0.217$$

بنفس الأسلوب نجد بقية معاملات الارتباط بين المتغيرات، فمثلاً معامل الارتباط بين المتغيرين X1,X2 يمكن ايجادهُ كما يلي:

$$r_{X1X2} = \frac{S_{X1X2}}{\sqrt{S_{X1X1}S_{X2X2}}} = \frac{\sum(X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{i2} - \bar{X}_2)}{\sqrt{(\sum X_{i1}^2 - \frac{(\sum X_{i1})^2}{n})(\sum X_{i2}^2 - \frac{(\sum X_{i2})^2}{n})}} = -0.1552$$

وهكذا لبقية معاملات الارتباط البسيط بين المتغيرات لتكوين مصفوفة الارتباط والتي هي:

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{34} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{bmatrix}$$

بذلك تكون مصفوفة الارتباط كما يلي:

$$r = \begin{bmatrix} 1 & -0.1552 & 0.217 & 0.1519 \\ -0.1552 & 1 & 0.236 & -0.448 \\ 0.217 & 0.236 & 1 & -0.242 \\ 0.1519 & -0.448 & -0.242 & 1 \end{bmatrix}$$

بذلك وبعد إيجاد معاملات الارتباط التي نحتاجها لإيجاد معامل الارتباط الجزئي بين X1 وX3 بثباتX2 (معامل ارتباط جزئي من الدرجة الأولى)، نطبق الصيغة وكما يلي:

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{32}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{32}^2)}}$$

$$r_{13.2} = \frac{0.217 - (-0.1522)(0.236)}{\sqrt{(1 - (-0.1522)^2)(1 - (0.236)^2)}} = \frac{0.235}{\sqrt{0.9206}} = \frac{0.253}{0.959} = 0.263$$

5- معامل الارتباط الجزئي بين X1 وX3 بثباتX2 وX4 (معامل ارتباط جزئي من الدرجة الثانية).

$$r_{ij.kL} = \frac{r_{ij.k} - r_{iL.k}r_{jL.k}}{\sqrt{(1 - r_{iL.k}^2)(1 - r_{jL.k}^2)}}$$

$$r_{13.24} = \frac{r_{13.2} - r_{14.2}r_{34.2}}{\sqrt{(1 - r_{14.2}^2)(1 - r_{34.2}^2)}} = \frac{0.263 - (0.0933)(-0.157)}{\sqrt{(1 - (0.0933)^2)(1 - (-0.157)^2)}}$$

$$r_{13.24} = \frac{0.277}{0.983} = 0.282$$

حيث ان القيم في الصيغة أعلاه تم ايجادها من خلال معامل الارتباط الجزئي من الدرجة الأولى، فمثلاً معامل الارتباط الجزئي $r_{14.2}$ يمكن ايجاده كما يلي:

$$r_{14.2} = \frac{r_{14} - r_{12}r_{42}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{42}^2)}} = \frac{0.1519 - (-0.1552)(-0.448)}{\sqrt{(1 - (-0.155)^2)(1 - (-0.448)^2)}}$$

$$r_{14.2} = 0.0933$$

ومعامل الارتباط الجزئي $r_{34.2}$ يمكن ايجاده كما يلي:

$$r_{34.2}=\frac{r_{34}-r_{32}r_{42}}{\sqrt{(1-r_{32}^2)(1-r_{42}^2)}}=\frac{-0.242-(0.236)(-0.448)}{\sqrt{(1-(0.236)^2)(1-(-0.448)^2)}}$$

$$r_{34.2}=-0.157$$

6- معامل الانحدار الجزئي القياسي من خلال:

1. من خلال معامل الانحدار الجزئي.

من خلال العلاقة بين معامل الانحدار الجزئي القياسي ومعامل الانحدار الجزئي وكما يلي:

$$\hat{\beta}_i^* = \hat{\beta}_i\left(\frac{S_{xi}}{S_{yi}}\right)$$

حيث ان S_{x1} هو الانحراف القياسي للمتغير X1 والذي يمكن ايجادهُ من خلال الصيغة الاتية:

$$S_{X1}=\frac{\sum(X_{i1}-\overline{X})^2}{n-1}$$

ويطبق على جميع المتغيرات وعلى المتغير y ايضاً. بذلك سيكون قيم الانحراف القياسي لبقية المتغيرات هي كما يلي:

$$S_y=2.804\,,S_{X1}=0.8944\,,S_{X2}=2.8809\,,S_{X3}=3.0822\,,S_{X4}=1.4719$$

بذلك فان معامل الانحدار الجزئي القياسي للمتغيرات هي كما يلي:

$$\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_1\left(\frac{S_{x1}}{S_y}\right)=(-0.739)\left[\frac{0.8944}{2.804}\right]=-0.235$$

$$\hat{\beta}_2^* = \hat{\beta}_2\left(\frac{S_{x2}}{S_y}\right)=(0.767)\left[\frac{2.8809}{2.804}\right]=0.788$$

$$\hat{\beta}_3^* = \hat{\beta}_3\left(\frac{S_{x3}}{S_y}\right)=(-0.298)\left[\frac{3.0822}{2.804}\right]=-0.327$$

$$\hat{\beta}_4^* = \hat{\beta}_4\left(\frac{S_{x4}}{S_y}\right)=(1.389)\left[\frac{1.4719}{2.804}\right]=0.7291$$

2. من خلال البيانات.

يمكن تحويل المتغيرات الى الصورة القياسية ومن ثم حساب معامل الانحدار الجزئي القياسي وكما يلي:

$$X_i^* = \frac{X_i - \bar{X}_i}{S_i}$$

X_4	X_3	X_2	X_1	y	المشاهدة
-1.47196	1.459993	0.520658	0	-0.83192	1
0.566139	0.811107	0.867763	1.118034	0.237691	2
-0.79259	-1.13555	1.214868	-1.11803	0.950765	3
1.245505	-0.48666	-0.52066	0	1.307302	4
0.566139	0.162221	-0.86776	-1.11803	-0.47538	5
-0.11323	-0.81111	-1.21487	1.118034	-1.18846	6
					المجموع

وبذلك وبنفس الأسلوب للتقدير يتم إيجاد متجه المعلمات المقدرة باستخدام المصفوفات، وبذلك ستكون النتيجة كالاتي:

$$\hat{\beta}^* = \begin{bmatrix} -0.235 \\ 0.788 \\ -0.327 \\ 0.729 \end{bmatrix}$$

تقدير فترة ثقة لدالة خطية بسيطة لعدة معاملات جزئية

نفرض ان معادلة الانحدار هي:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + e_i, i = 1,2,\ldots,n$$

ولنفرض ان لدينا الدالة الخطية L والتي تأخذ الشكل الاتي:

$$L = \beta_2 - \beta_3$$

فلإيجاد فترة ثقة لـ L نتبع ما يأتي:

$$\hat{L} - t_{\frac{1}{2}\alpha,n-m-1} S_{\hat{L}} \leq L \leq \hat{L} + t_{\frac{1}{2}\alpha,n-m-1} S_{\hat{L}}$$

اذ ان:

$$S_{\hat{L}} = \sqrt{S_{\hat{L}}^2} = \sqrt{S_{(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)}^2}$$

$$S_{(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)}^2 = S_{\hat{\beta}_2}^2 + S_{\hat{\beta}_3}^2 - 2Cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$$

$$S_{(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)}^2 = MSe(C_{22} + C_{33} - 2C_{23})$$

مثال: إذا كان لديك البيانات الاتية:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 17 & 18 \\ & 32 & 34 & 36 \\ & & 49 & 42 \\ & & & 48 \end{bmatrix} \quad , X'y = \begin{bmatrix} 56 \\ 116 \\ 156 \\ 142 \end{bmatrix}$$

المطلوب: جد فترة ثقة لـ $L = \beta_2 - \beta_3$ حيث ن $MSe = 1.22$ وان n=7 وان

$$t_{\frac{1}{2}0.05,7-3-1} = t_{0.025,3} = 3.182$$

الحل:

نجد معكوس مصفوفة $(X'X)$ وكما يلي:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 9.1667 & -0.5 & -0.833 & -2.333 \\ & 0.25 & 0 & 0 \\ & & 0.1667 & 0.1667 \\ & & & 0.75 \end{bmatrix}$$

بذلك يكون متجه المعلمات المقدرة هو:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}X'y = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \\ 1.833 \end{bmatrix}$$

نقدر الان قيمة الدالة الخطية $L = \beta_2 - \beta_3$ وكما يلي:

$$L = \beta_2 - \beta_3$$

حيث ان:

$$\hat{\beta}_2 = 3 \,, \hat{\beta}_3 = 1.833$$

اما تباين الدالة الخطية فيكون:

$$S^2_{(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)} = S^2_{\hat{\beta}_2} + S^2_{\hat{\beta}_3} - 2Cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$$

$$S^2_{(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)} = MSe(C_{22} + C_{33} - 2C_{23})$$

$$S^2_{(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)} = 1.22\big(0.1667 + 0.75 - (2)(0.1667)\big)$$

$$S^2_{(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)} = 0.7116$$

$$S_{\hat{L}} = S_{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3} = \sqrt{0.7166} = 0.8436$$

لإيجاد فترة الثقة نستخدم الصيغة الاتية:

$$\hat{L} - t_{\frac{1}{2}\alpha, n-m-1} S_{\hat{L}} \le L \le \hat{L} + t_{\frac{1}{2}\alpha, n-m-1} S_{\hat{L}}$$

$$\big(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3\big) - t_{\frac{1}{2}0.05, 7-3-1} S_{\hat{L}} \le L \le \big(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3\big) + t_{\frac{1}{2}0.05, 7-3-1} S_{\hat{L}}$$

$$(3 - 1.833) - (3.182)(0.8436) \le L \le (3 - 1.833) + (3.182)(0.8436)$$

$$-1.52 \le L \le 3.85$$

$$-1.52 \le \beta_2 - \beta_3 \le 3.85$$

وبما ان الفترة تحتوي على الصفر لذا فانهُ لا يوجد فرق معنوي بين β_2 و β_3.

تقدير فترة ثقة لمتوسط الاستجابة

نفرض ان $X_{01}, X_{02}, \ldots, X_{0m}$ هي قيمة من قيم المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_m$ والتي نرغب بعمل تقدير فترة ثقة لمتوسط الاستجابة عند نقطة معينة والتي هي $\bar{y}_x$ والتي تساوي:

$$\bar{y}_x = \hat{y}_0 = X_0'\hat{\beta}$$

حيث ان:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ X_{01} \\ X_{02} \\ \vdots \\ X_{0m} \end{bmatrix}$$

ان قيمة $\bar{y}_x$ تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي قدرهُ:

$$E\left(\frac{y}{X_0}\right) = \hat{\beta}_0 X_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \ldots + \hat{\beta}_m X_m$$

وتباين:

$$\sigma^2_{\hat{y}_X} = \frac{\hat{\sigma}^2}{w} = \frac{MSe}{w}$$

اذ ان:

$$\frac{1}{w} = X_0'(X'X)^{-1}X_0$$

لذا فان فترة الثقة لمتوسط الاستجابة هي:

$$\hat{y}_0 - t_{\frac{1}{2}\alpha, n-m-1}\sqrt{\sigma^2_{\hat{y}_X}} \le y_0 \le \hat{y}_0 + t_{\frac{1}{2}\alpha, n-m-1}\sqrt{\sigma^2_{\hat{y}_X}}$$

مثال:

من البيانات الاتية، جد 95% فترة ثقة لمتوسط الاستجابة عند $X_1=3$, $X_2=4$, $X_3=5$، وان $t_{\frac{1}{2}0.05,7-3-1} = t_{0.025,3} = 3.182$ والمعلومات كما يلي:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \\ 1.833 \end{bmatrix}, MSe = 1.22$$

$$\left(X'X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 9.1667 & -0.5 & -0.833 & -2.333 \\ & 0.25 & 0 & 0 \\ & & 0.1667 & 0.1667 \\ & & & 0.75 \end{bmatrix}$$

الحل:

بما ان:

$$\hat{y}_0 = X_0'\hat{\beta}$$

نعوض عن قيم X ‏(X₁=3 , X₂=4 , X₃=5) في X_0' ، وعن قيم $\hat{\beta}$ بقيمها التقديرية وكما يلي:

$$\hat{y}_0 = X_0'\hat{\beta} = [1 \quad 3 \quad 4 \quad 5]\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \\ 1.833 \end{bmatrix} = 18.1665$$

ان تباين $\hat{y}_0$ هو $\frac{MSe}{w}$ حيث ان:

$$\frac{1}{w} = X_0'(X'X)^{-1}X_0$$

$$X_0'(X'X)^{-1}X_0 = [1 \quad 3 \quad 4 \quad 5]\begin{bmatrix} 9.1667 & -0.5 & -0.833 & -2.333 \\ -0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ -0.833 & 0 & 0.1667 & 0.1667 \\ -2.333 & 0 & 0.1667 & 0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{w} = X_0'(X'X)^{-1}X_0 = 6.5$$

لذا فأن 95% فترة ثقة لمتوسط y عند تلك النقطة هي:

$$\hat{y}_0 - t_{\frac{1}{2}\alpha,n-m-1}\sqrt{\sigma^2_{\hat{y}_X}} \le y_0 \le \hat{y}_0 + t_{\frac{1}{2}\alpha,n-m-1}\sqrt{\sigma^2_{\hat{y}_X}}$$

$$\hat{y}_0 - t_{\frac{1}{2}\alpha,n-m-1}\sqrt{\frac{MSe}{w}} \le y_0 \le \hat{y}_0 + t_{\frac{1}{2}\alpha,n-m-1}\sqrt{\frac{MSe}{w}}$$

$$\hat{y}_0 - t_{\frac{1}{2}\alpha,n-m-1}\sqrt{MSe\, X_0'(X'X)^{-1}X_0} \le y_0 \le \hat{y}_0 + t_{\frac{1}{2}\alpha,n-m-1}\sqrt{X_0'(X'X)^{-1}X_0}$$

$$18.1665 - (3.182)\sqrt{(1.22)(6.5)} \le y_0 \le 18.1665 + (3.182)\sqrt{(1.22)(6.5)}$$

$$9.205 \le y_0 \le 27.127$$

مجموع المربعات الإضافي Additional sum of squares

على فرض لدينا النموذج الاتي:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + e_i$$

حيث ان متجه المعلمات المقدرة سيكون بالشكل الاتي:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_4 \\ \hat{\beta}_5 \end{bmatrix}$$

ما هو المقصود بمجموع المربعات الإضافي ؟:

المقصود بمجموع المربعات الإضافي هو مقدار المربعات الذي يضيفهُ متغير معين نتيجة اضافتهُ الى متغيرات موجودة في النموذج. ففي كثير من الحالات يرغب الباحث في معرفة فيما اذا كانت هناك مجموعة جزئية من المتغيرات المستقلة (ولتكن X4 و X5 مثلاً) يكون لها تأثير معنوي في التنبؤ لـ y لنموذج يحتوي على المتغيرات X1, X2 , X3 .

ويرمز لمجموع المربعات لمثل هذه الحالة بالصيغة الاتية:

$$SSR(X_4, X_5 / X_1, X_2, X_3)$$

وهناك اسلوبين لإيجاد مجموع المربعات الإضافي هما:

1- الطريقة الاعتيادية

تتمثل هذه الطريقة من خلال استخدام مجموع المربعات الكلي مطروحاً منهُ مجموع المربعات للنموذج الذي يحتوي على المتغيرات الثابتة.

فلإيجاد مجموع المربعات الإضافي لإضافة المتغيرين X5,X4 الى نموذج يحتوي على المتغيرات X3,X2,X1 نستخدم الصيغة الاتية:

$$SSR(X_4, X_5 / X_1, X_2, X_3) = SSR(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) - SSR(X_1, X_2, X_3)$$

حيث ان $SSR(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ هو نموذج ذو خمس متغيرات.

وان $SSR(X_1, X_2, X_3)$ هو نموذج ذو ثلاث متغيرات.

2- <u>باستخدام الطريقة المختصرة</u>

تتمثل الطريقة المختصرة بالصيغة الاتية:

$$SR(X_4, X_5/X1, X_2, X_3) = [\hat{\beta}_4 \quad \hat{\beta}_5] \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_4 \\ \hat{\beta}_5 \end{bmatrix}$$

حيث ان قيم $\hat{\beta}_4$ و $\hat{\beta}_5$ تؤخذ من النموذج الكلي، كذلك المصفوفة $\begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}$ تؤخذ من المصفوفة $(X'X)^{-1}$ بعد حذف كل من قيم C ما عدا القيم التابعة للمعلمات المقدرة $\hat{\beta}_4$ و $\hat{\beta}_5$.

مثال اخر: لإيجاد مجموع المربعات الإضافي العائد لمتغير مستقل واحد وليكن X3 مضافاً على نموذج يحتوي على المتغيرات X5,X4,X2,X1 نستخدم الصيغة الاتية:

$$SSR(X_3/X_1, X_2, X_4, X_5) = SSR(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) - SSR(X_1, X_2, X_4, X_5)$$

حيث ان النموذج $SSR(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ هو نموذج يحتوي على جميع المتغيرات X_1, X_2, X_3, X_4, X_5.

وان النموذج $SSR(X_1, X_2, X_4, X_5)$ هو نموذج يحتوي على اربع متغيرات فقط وهي X_1, X_2, X_4, X_5.

او يمكن إيجاد مجموع المربعات الإضافي $SSR(X_3/X_1, X_2, X_4, X_5)$ بالطريقة المختصرة من خلال:

$$SSR(X_3/X_1, X_2, X_4, X_5) = \hat{\beta}_3{}' C_{33}^{-1} \hat{\beta}_3 = \frac{\hat{\beta}_3{}^2}{C_{33}}$$

مثال: إذا كان لديك البيانات الاتية:

X4	X3	X2	X1	y
1	10	6	4	3
4	8	7	5	6
2	2	8	3	8
5	4	3	4	9
4	6	2	3	4
3	3	1	5	2

المطلوب: جد مجموع المربعات الإضافي لإضافة المتغيرين X2,X1 الى نموذج يحتوي على X4,X3 وباستخدام الطريقة العادية والمختصرة.

الحل:

نقدر في بادئ الامر نموذج المعلمات الكلي، أي الذي يحتوي على جميع المعلمات:

$$y_i = 2.08 - 0.74\, X_1 + 0.768\, X_2 - 0.299\, X_3 + 1.39\, X_4$$

باستخدام الطريقة الاعتيادية:

$$SSR(X_1, X_2/X_3, X_4) = SSR(X_1, X_2, X_3, X_4) - SSR(\, X_3, X_4)$$

في البداية نجد قيمة مجموع المربعات لنموذج يحتوي على جميع المتغيرات X4,X3,X2,X1 وكما يلي:

$$SSR(X_1, X_2, X_3, X_4) = \hat{\beta}' X' y - n\bar{y}^2$$

$$= [2.08 \quad -0.74 \quad 0.768 \quad -0.299 \quad 1.39] \begin{bmatrix} 32 \\ 124 \\ 161 \\ 160 \\ 110 \end{bmatrix} - 6 * (5.33)^2$$

$$SSR(X_1, X_2, X_3, X_4) = 203.508 - 170.666$$

$$SSR(X_1, X_2, X_3, X_4) = 32.84$$

نجد الان مجموع المربعات لنموذج يحتوي على المتغيرين X4,X3 فقط، وكما يلي:

$$SSR(X_3, X_4) = \hat{\beta}' X' y - n\bar{y}^2$$

$$= [4.644 \quad -0.2595 \quad 0.6683] \begin{bmatrix} 32 \\ 160 \\ 110 \end{bmatrix} - 6 * (5.33)^2$$

$$SSR(X_3, X_4) = 180.601 - 170.66$$

$$SSR(X_3, X_4) = 9.934$$

بذلك نجد الان مجموع المربعات الإضافي لإضافة المتغيرين X2,X1 الى نموذج يحتوي على المتغيرين X4,X3

$$SSR(X_1, X_2/X_3, X_4) = SSR(X_1, X_2, X_3, X_4) - SSR(\ X_3, X_4)$$

$$SSR(X_1, X_2/X_3, X_4) = 32.84 - 9.934$$

$$SSR(X_1, X_2/X_3, X_4) = 22.88$$

الطريقة المختصرة:

$$SSR(X_1, X_2/X_3, X_4) = \hat{\beta}_{12}{}' C_{12}^{-1} \hat{\beta}_{12}$$

$$= [\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

$$= [-0.74 \quad 0.768] \begin{bmatrix} 0.2811 & 0.0135 \\ 0.0135 & 0.03147 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.74 \\ 0.768 \end{bmatrix}$$

$$SSR(X_1, X_2/X_3, X_4) = 22.88$$

علماً ان المصفوفة $(X'X)^{-1}$ هي:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 6.836 & -0.9723 & -0.2434 & -0.0517 & -0.442 \\ -0.9723 & 0.2811 & 0.0135 & -0.0234 & -0.0261 \\ -0.2434 & 0.0135 & 0.0314 & -0.005 & 0.0237 \\ -0.0517 & -0.0234 & -0.005 & 0.0248 & 0.0103 \\ -0.442 & -0.0261 & 0.0237 & 0.0103 & 0.1208 \end{bmatrix}$$