م / المعهد التقني / كركوك

قسم التقنيات المدنية

بطاقة خطة الدرس لمادة

الرياضيات

للصف الاول

الجامعة التقنية الشمالية

المعهد التقني / كركوك

قسم التقنيات المدنية

المادة : الرياضيات

المرحلة: الاولى

30 أسبوع

ن	ع	مج
3	-	3

الهدف من تدريس المادة

تطوير امكانية الطالب في استخدام الرياضيات في التطبيقات العملية و الاستفادة منها في الدروس الهندسية الاخرى. تعلم الطالب الطرق المختلفة في تمثيل المعادلات والقوانين الرياضية والمعطيات المختلفة على تشكيل منحنيات في رسم بياني وبانواع مختلفة من المخططات تتناسب والغرض من رسمها.

الاسبوع	المفردات
1	المصفوفات,المحددات,خواصها.
2	حل المعادلات الخطية,طريقة كرامير,تطبيقات على المحددات.
3	المتجهات,الكميات المتجهة والقياسية,العمليات الحسابية.
4	مقياس المتجهة,الضرب القياسي والاتجاهي.
5	الدالة,الدوال المثلثية والعلاقات المثلثية,الدالة اللوغارتمية.
6	الدالة الاسية,دوال القطع الزائد.
7	الغايات,غاية الدوال الجبرية والمثلثية.
8	المتواليات.
9	التفاضل,المشتقة,قاعدة السلسلة.
10	الدوال المنحنية, الدالة القياسية المشتقة ذات المراتب العليا.
11	مشتقة الدوال المثلثية,مشتقة الدوال اللوغارتمية.

12	مشتقة الدالة الاسية,مشتقة الدوال الزائدية.
13	تطبيقات المشتقة,معادلة المماس والعمود,السرعة والتعجيل والتكبير.
14	الاسس واللوغارتميات.
15	تطبيقات فيزياوية,رسم الدوال.
16	التكامل,التكامل غير المحدد.
17	تكامل الدوال الاسية والمثلثية.
18	التكامل المحدد,تطبيقات التكامل المحدد,المساحة تحت المنحني,المساحة بين المنحنيين.
19	الحجوم الدورانية,طول قوسي المنحني .
20	تطبيقات فيزياوية و هندسية .
22-21	طرق عامة في التكامل وتشمل التعويض والتجزئة.
23	استخدام الكسور الجزئية والاسية واللوغارتمية.
24	الطرق العددية في التكامل, قاعدة شبه المنحرف .
25	حل المعادلات التفاضلية المنفصلة و المتجانسة والخطية .
26	ايجاد قيمة اعلى او اوطا نقطة منحني .
27	الاعداد المركبة ,جمع,طرح,ضرب,قسمة.
28	الصيغة القطبية ,القوى والجذور.
30-29	العمليات الاحصائية ,التوزيعات التكرارية,المدرج التكراري ,المنحني التكراري .

المصادر:-

1- سلسلة شوم .
2- الكتاب المنهجي (الرياضيات التطبيقية).
3- كتاب Calculus Tomas .
4- Advanced mathematics.
5- Advanced Engineering Mathematics
By: Erwin Kreyszig

6- Mathematics for Electrical Engineering

By: Mary Attenborough

الاسبوع الاول والثاني :-

المصفوفات، المحددات،خواصها.

<u>الهدف الخاص</u>:- سيكون الطالب قادرا على ان :-

1-يتعرف على شكل المصفوفةوخواصها .
2-يتعرف على شكل المحددة وخواصها.
3-يستخدم المصفوفة والمحددة في العمليات الحسابية .

<u>الاختبار القبلي :-</u>

س1/ اذكر انواع المصفوفات وماهي خاصية المصفوفة الصفرية.

س2/ كم طريقة يمكن حل المحددة الثلاثية

المصفوفات – المحددات – خواصهما

Matrices المصفوفات

Properties involving Addition. Let A, B, and C be mxn matrices. We have

(9) $A+B = B+A$

2. $(A+B)+C = A + (B+C)$

$$A + \mathcal{O} = A$$

3

where $\mathcal{O}$ is the m x n zero-matrix (all its entries are equal to 0);

4.

$$A + B = \mathcal{O}$$

if and only if $B = -A$.

Properties involving Multiplication.

1.

Let A, B, and C be three matrices. If you can perform the products AB, $(AB)C$, BC, and $A(BC)$, then we have

$$(AB)C = A\,(BC)$$

Note, for example, that if A is 2x3, B is 3x3, and C is 3x1, then the above products are possible (in this case, $(AB)C$ is 2x1 matrix).

2.

If α and β are numbers, and A is a matrix, then we have

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

3.

If α is a number, and A and B are two matrices such that the product $A \cdot B$ is possible, then we have

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

4.

If A is an nxm matrix and $\mathcal{O}$ the mxk zero-matrix, then

$$A\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

Note that $A\mathcal{O}$ is the nxk zero-matrix. So if n is different from m, the two zero-matrices are different.

Properties involving Addition and Multiplication.

1.

Let *A*, *B*, and *C* be three matrices. If you can perform the appropriate products, then we have

$$(A+B)C = AC + BC$$

and

$$A(B+C) = AB + AC$$

2.

If α and β are numbers, *A* and *B* are matrices, then we have

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

and

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

Example. Consider the matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ and } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Evaluate (*AB*)*C* and *A*(*BC*). Check that you get the same matrix.

Answer. We have

$$AB = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

so

$$(AB)C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

On the other hand, we have

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

so

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Example. Consider the matrices

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{, and } Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \nu & \gamma \end{pmatrix}.$$

It is easy to check that

$$X = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

and

$$Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

These two formulas are called **linear combinations**. More on linear combinations will be discussed on a different page.

We have seen that matrix multiplication is different from normal multiplication (between numbers). Are there some similarities? For example, is there a matrix which plays a similar role as the number 1? The answer is yes. Indeed, consider the nxn matrix

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

In particular, we have

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The matrix I_n has similar behavior as the number 1. Indeed, for any nxn matrix A, we have

$$A\, I_n = I_n\, A = A$$

The matrix I_n is called the **Identity Matrix** of order n.

Example. Consider the matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Then it is easy to check that

$$AB = I_2 \text{ and } BA = I_2.$$

The identity matrix behaves like the number 1 not only among the matrices of the form nxn. Indeed, for any nxm matrix A, we have

$$I_n A = A \text{ and } AI_m = A.$$

Determinants

المحددات

حل المعادلات الخطية بطريقة كرايمر :

The *determinant* of a square matrix is a number which is quite useful in the theory of equations and can be computed in a straightforward manner.

Definition 1.6.1 The *determinant* of the 2×2 matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Example 1 Calculate the determinant of the following matrices.

(*a*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (*b*) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ (*c*) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

Solution

(*a*)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3$$

(*b*)

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = (-1)7 - (-1)2 = -5$$

©

$$\det \begin{pmatrix} 1 & i \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = 1(-3) - i(-3) = -3 + 3i$$

Our definition of $\det A$ for a 2×2 matrix allows us to calculate $\det A_{n \times n}$ by reducing the problem to several determinants of 2×2 matrices. In the definition, we show an example alongside.

Definition 1.6.2 For an $n \times n$ matrix $A, \det A$ is the number which can be calculated in the following way:

1.

Choose any row of A, say, a_{i1}, a_{i2}, $a_{i3}, \ldots, a_{in}$ (row i, where i is arbitrarily chosen).

2.

Let M_{ij} be the $(n-1)\times(n-1)$ matrix obtained from A by crossing out the ith row and jth column of A

3.

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det M_{in}$$

Consider

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.

Choose row 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$M_{21} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^3\mathbf{4}(-2-2) \\ &\quad + (-1)^4\mathbf{1}(1-4) \\ &\quad + (-1)^5(\mathbf{-3})[1-(-4)] \\ &= 16 - 3 + 15 = 28 \end{aligned}$$

or the number can be calculated in an alternative way:

1.

Choose any column of A, say,

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

(column j, j arbitrary).

2.

Let M_{ij} be as in 2 above.

3.

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det M_{1j} \\ + (-1)^{2+j} a_{2j} \det M_{2j} \\ + \cdots \\ + (-1)^{n+j} a_{nj} \det M_{nj}$$

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \mathbf{2} \\ 4 & 1 & -\mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Choose column 3:

2.

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\det A = (-1)^4 \mathbf{2}(4-2) \\ + (-1)^5(-\mathbf{3})[1-(-4)] \\ + (-1)^6 \mathbf{1}[1-(-8)] \\ = 4 + 15 + 9 = 28$$

Note that the determinant of an $n \times n$ matrix is defined as a sum of ± 1 times determinants of $(n-1) \times (n-1)$ matrices. Each of those determinants is calculated as a sum of ± 1 times determinants of $(n-2) \times (n-2)$ matrices. Continuing this process, we work down to determinants of 2×2 matrices, which we know how to compute. It is not at all obvious (but true) that $\det A$ is independent of the choice of row or column for calculation. The determinant is not defined for nonsquare matrices.

Example 2 Calculate

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(9) by choosing a row and (*b*) by choosing a column.

Solution First we show a simple way to remember whether to write $+1$ or -1 in using the definition. For a_{11}, $(-1)^{1+1} = +1$; when we move to the right or down, we have a sign of -1 since $(-1)^{2+1} = -1$ and $(-1)^{1+2} = -1$. That is, the sign changes as we move one row up or down, or one column left or right. So for a 3×3 matrix the signs are

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

(*a*)

Use the second row. This is preferable to using row 1 because the zero entry will be multiplied by another determinant, which will give a zero. Using the second row (see Fig. 1.6.1) gives

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= -4\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{1}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad -\mathbf{0}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -4(-1) + 1(3) - 0 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{-1} \\ 4 & 0 & \mathbf{1} \\ 3 & -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} &= +(\mathbf{-1})\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad -\mathbf{0}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \mathbf{0}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -1(-7) - 0 + 0 = 7\end{aligned}$$

(*b*)

Use column 3 since it has the most zeros.

Example 3 Calculate

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution Choose column 4 since it has the most zeros. The signs are

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

So

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \mathbf{0} \\ 7 & 3 & 0 & \mathbf{3} \\ -1 & 1 & -4 & \mathbf{0} \\ 0 & 3 & 2 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \mathbf{+3}\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Use column 1}}$$

$$\mathbf{+1}\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{\text{Use column 3}}$$

$$= \mathbf{3}\left[\mathbf{1}\det\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\mathbf{+1}\left[\mathbf{4}\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-4)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= 3[14 + (-16)] + [4(10) - 4(17)] = -34$$

Example 4 Solve

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= \ \ 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= \ \ 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

by using Cramer’s rule

.

Solution First we calculate $\det A$:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{R2+R3}}{\uparrow =} \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

Now substitute

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

for column 1 and calculate

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-4} \underset{-\text{C2+C3}}{\uparrow =} \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Similarly,

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}}{-4} \underset{-4\text{C2+C2}}{\uparrow =} \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}}{-4} \underset{\substack{\uparrow \\ R2+R3 \\ R1+R2}}{=} \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

The answer checks, by direct substitution.

الاختبار البعدي

Problems 1.6

1-Calculate the determinants of the following matrices by using the definition.

(*a*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (*b*) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (*c*) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 6 & -7 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2-Calculate the determinants of the following matrices by using row reduction.

(*a*) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ (*b*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ (*c*) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

3-Evaluate the determinants of the following matrices by using theorems or corollaries or special structure of the matrix.

(*a*) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (*b*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ (*c*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

4-Use Cramer's rule to solve the following systems.

$$(a)\ \begin{aligned} 3x-2y&=7\\ 4x+\ y&=8\end{aligned} \qquad (b)\ \begin{aligned} x-2y+\ z&=\ 3\\ -x-\ y-\ z&=\ 5\\ 3x+\ y-7z&=-3\end{aligned}$$

5-Show for

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ -3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

that $\det A=\det A^T$.

6-Using

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -6 & 3\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3\\ 7 & 11\end{pmatrix}$$

illustrate

$$\det AB=\det A\det B$$

Find values for k which make the determinant of the given matrix equal to zero.

$$(a)\ \begin{pmatrix} k-1 & 2\\ 1 & k\end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} k-2 & 5\\ 10 & k+3\end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} k & 1\\ -1 & k\end{pmatrix}$$

8- Show that $\det I_n=1$.

9- Show that if $A_{n\times n}B_{n\times n}=I$, then $\det(ACB)=\det C$ (C is $n\times n$).

الاسبوع الثالث والرابع

The Vectors المتجهات

<u>الهدف الخاص:</u> سيكون الطالب قادرا على ان :-

1- يوصف الكثير من الكميات الطبيعة مثل المساحة و الطول والكتلة وصفا كاملا بمجرد اعطاء عدد حقيقي يمثل الكمية وكذلك والقوة والتعجيل والسرعة في الفيزياء .

2- يعرف بان هذه الكميات لها قيمة واتجاه معين .

3- يمكن تمثيل المتجه هندسيا كجزء من خط مستقيم او كسهم .

يتعرف على انواع المتجهات

الاختبار القبلي :-

س1/ عرف المتجه ومن ثم

حدد كل من الكميات الاتية الى متجهه او غيرمتجهه .

أ- الكتلة ب- التعجيل ج- السرعة د- القوة ه-المسافة

و- الطول ح- الحجم ك- الكتلة

س2/ هل يمكن جمع قيمة في الفضاء الثنائي مع قيمة في الفضاء الثلا ثي؟

Two vectors are *equal* if they have the same *magnitude*, the same *direction* (i.e. they are *parallel*) and the same *sense*.

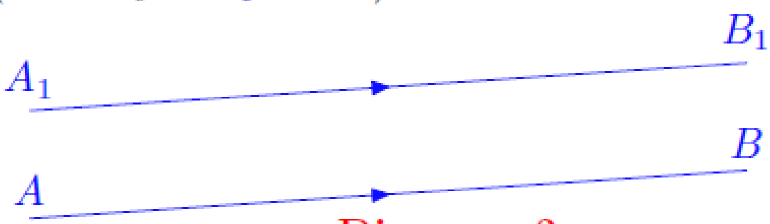


Diagram 2

In **diagram 2** the vectors $\vec{AB}$ and $\vec{A_1B_1}$ are equal, i.e. $\vec{AB}=\vec{A_1B_1}$. If two vectors have the same length, are parallel but have *opposite* senses then one is the negative of the other.

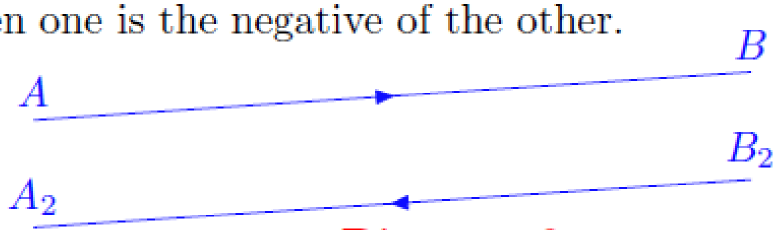


Diagram 3

In **diagram 3** the vectors $\vec{AB}$ and $\vec{B_2A_2}$ are of equal length, are parallel but are *opposite* in sense, so $\vec{AB}=-\vec{B_2A_2}$.

Quiz

Diagram 4 shows a parallelogram. Which of the following equations is the correct one?

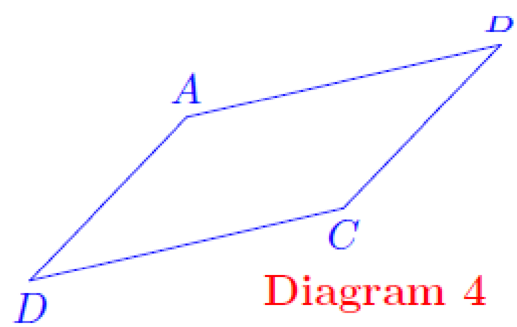


Diagram 4

(a) $\vec{DA}=\vec{BC}$, (b) $\vec{AD}=-\vec{CB}$, (c) $\vec{AD}=\vec{CB}$, (d) $\vec{DA}=-\vec{CB}$.

If two vectors are parallel, have the same sense but different magnitudes then one vector is a *scalar* (i.e. numeric) multiple of the other.

If two vectors are parallel, have the same sense but different magnitudes then one vector is a *scalar* (i.e. numeric) multiple of the other.

In **diagram 5** the vector $\overrightarrow{AB}$ is parallel to $\overrightarrow{A_3B_3}$, has the same sense but is twice as long, so $\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{A_3B_3}$.

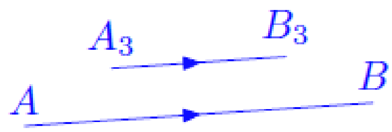


Diagram 5

In general *multiplying a vector by a positive number λ gives a vector parallel to the original vector, with the same sense but with magnitude λ times that of the original*. If λ is *negative* then the sense is reversed. Thus from **diagram 5** for example, $\overrightarrow{A_3B_3} = -\frac{1}{2}\ \overrightarrow{BA}$.

2. Addition of Vectors

In **diagram 6** the three vectors given by $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$, and $\overrightarrow{AC}$, make up the sides of a triangle as shown. Referring to this diagram, the law of addition for vectors, which is usually known as the *triangle law of addition*, is

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\ .$$

The vector $\overrightarrow{AC}$ is called the *resultant vector*.

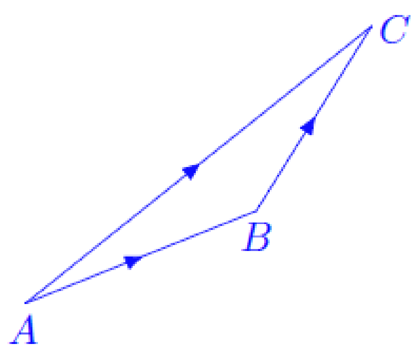


Diagram 6

Physical quantities which can be described as vectors satisfy such a law. One such example is the action of forces. If two forces are represented by the vectors $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{BC}$ then the effect of applying *both of these forces together* is equivalent to a single force, the *resultant force*, represented by the vector $\overrightarrow{AC}$.

One further vector is required, the *zero vector*. This has *no direction* and *zero magnitude*. It will be written as $\mathbf{0}$.

Example 1 (**The mid-points theorem**)

Let ABC be a triangle and let D be the midpoint of AC and E be the midpoint of BC. Prove that DE is parallel to AB and half its length i.e. $|AB| = 2|DE|$.

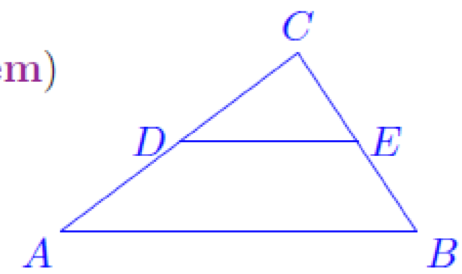


Diagram 7

Proof

Since D is the midpoint of $\vec{AC}$, it follows that $\vec{AC}= 2\,\vec{DC}$. Similarly $\vec{CB}= 2\,\vec{CE}$. Then

$$\begin{aligned}\vec{AC} + \vec{CB} &= 2\,\vec{DC} + 2\,\vec{CE} \\ &= 2(\vec{DC} + \vec{CE})\,.\end{aligned}$$

Now $\quad \vec{AC} + \vec{CB}=\vec{AB} \quad$ and $\quad \vec{DC} + \vec{CE}=\vec{DE}$.

Substituting these into the equation above gives $\vec{AB}= 2\,\vec{DE}$.

Since these are vectors, AB must be parallel to DE and the length of

3. Component Form of Vectors

The diagram shows a vector $\vec{OC}$ at an angle to the x axis. Take $\mathbf{i}$ to be a vector of length 1 (called a *unit vector*) parallel to the x axis and in the positive direction, and $\mathbf{j}$ to be a vector of length 1 (another *unit vector*) parallel to the y axis and in the positive direction.

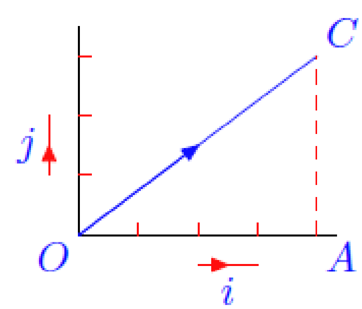


Diagram 8

From diagram 8, $\vec{OC}=\vec{OA} + \vec{AC}$. The vector $\vec{OA}$ is parallel to the vector $\mathbf{i}$ and four times its length so $\vec{OA}= 4\mathbf{i}$. Similarly $\vec{AC}= 3\mathbf{j}$. Thus the vector $\vec{OC}$ may be written as

$$\vec{OC}= 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\,.$$

This is known as the *2-dimensional component form* of the vector. In

To find the sum $a + 2b$ with
$a = -i + 3j$ and $b = 2i + 3j$,
first find the vector $2b$:
$2\,b = 2 \times (2i + 3j) = 4i + 6j$.
The vector $a + 2b$ is now found by adding the corresponding components of each vector. The resulting vector is thus
$a + 2b = (-i + 3j) + (4i + 6j)$
$= (-1 + 4)i + (3 + 6)j = 3i + 9j$.

To find the vector $2b - 3a$ with
$a = -i + 3j$ and $b = 2i + 3j$,
first find the vectors $2b$ and $3a$:
$2\,b = 2 \times (2i + 3j) = 4i + 6j$,
$3\,a = 3 \times (-i + 3j) = -3i + 9j$,
The vector $2b-3a$ is now easily found by subtracting the components of these vectors:
$2b - 3a = (4i + 6j) - (-3i + 9j)$
$= (4 + 3)i + (6 - 9)j = 7i - 3j$

To find the magnitude of the vector $a + b$, first find the sum of the two vectors
$a = -i + 3j$ and $b = 2i + 3j$.
The resulting vector is
$a + b = (-i + 3j) + (2i + 3j) = (-1 + 2)i + (3 + 3)j = i + 6j$.
The magnitude of this vector is given by
$|a + b| =$
p
$12 + 62 =$
p
37 .

To find $|2a-b|$, first find $2a-b$. The vector a in component form is given as
$a = -i + 3j$
so the component form of the vector $2a$ is
$2a = 2 \times (-1)i + 2 \times 3j = -2i + 6j$.
The difference between $2a$ and $b = 2i + 3j$ is the vector
$2a - b = (-2i + 6j) - (2i + 3j) = (-2 - 2)i + (6 - 3)j = -4i + 3j$.

The magnitude of the resulting vector 2a − b is therefore
|2a − b| =
p
(−4)2 + 32 =
p
25 = 5 .

الاختبار البعدي :

Choose the correct option for each of the following.

Begin Quiz

1. If a = −2i + 4j, b = 3i − 2j, c = 4i + 5j then a + b + c is
(a) −5i − 7j , (b) 5i − 7j , (c) −5i + 7j , (d) 5i + 7j .

2. If u = −2i + 4j, v = 3i + 2j, w = 4i + 6j then |u + v + w| is
(a) 5 , (b) 13 , (c) 4 , (d) 15 .

3. If u = −i+3j and v = i+2j, then _u+v is parallel to w = −i+4j
if _ is
(a) −6 , (b) 6 , (c) −5 , (d) 5 .

الاسبوع الخامس

الدوال المثلثية واللوغاريتمية

الهدف الخاص : سيكون الطالب قادرا على أن :-

1- يتعرف على معنى الدالة
2- يتعرف على المتطابقات
3- يحسب المعادلات اللوغاريتمية

الاختبار القبلي :

س1/ أوجد مشتقة الدوال الاتية :-

1- $Y=x^2 + 5$

2- $Y = \cos^2 x + \sin 2x$

س2/ حل المتطابقات الاتية:-

1- $\tan x \cdot \cot x = 1$

2- $\cos x \cdot \sec x = 1$

Functions:

١. تعريف الدالة

تعريف ١: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y. أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

حيث إن $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x .

نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق والمجموعة Y مجموعة الوصول والعنصر $f(x)$ صورة x بواسطة الدالة f والعنصر x أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة f ونقول بأن $f(x)$ غير معرفة في Y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(x)$ غير موجود في Y

نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f : X \to Y$

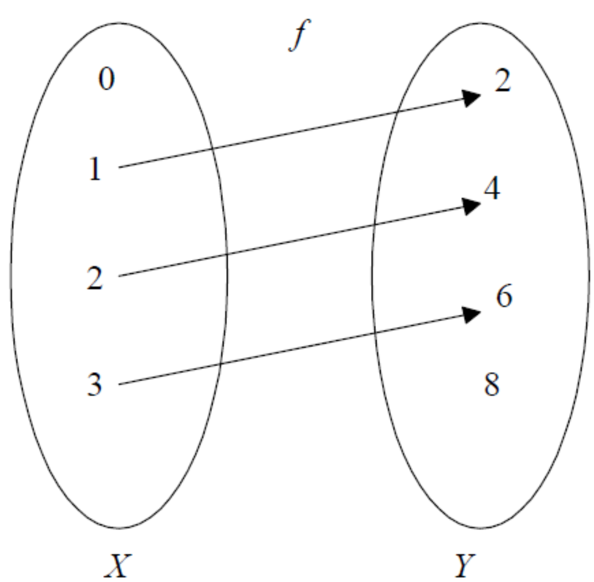
تجدر الإشارة إلى أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة على الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

مثال ١: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان:
$X = \{0,1,2,3\}$ و $Y = \{2,4,6,8\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 6$$

العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y .

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

$f : X \to Y$ حيث: $f(x) = 2x$

مثال : لتكن لدينا مجموعة الأعداد الطبيعية N والعلاقة f من N إلى N بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بين بأن f دالة.　　٢) حدد مجال f ومداها.　　٣) احسب $f(5)$ و $f(14)$.

الحل:

١) f دالة لأن: $x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

٢) كل عدد طبيعي له صورة بواسطة f إذاً: $D_f = \mathrm{N}$

بينما الأعداد الزوجية فقط هي التي لها أصول في N : $R_f = \{2,4,6,8,10,\cdots\}$

٣) $f(5) = 2 \times 5 = 10$ و $f(14) = 2 \times 14 = 28$.

والدوال المثلثية هي الدوال التي تكون معرّفة على الزوايا. ونقيس الزوايا بوحدة الراديان (الوحدة القياسية) أو بالدرجات (التي رمزها °) وعلاقة التحويل بين هاتين الوحدتين هي: $\pi = 180°$

ومن الدوال المثلثية: دالة الجيب ودالة جيب التمام ودالة الظل ودالة قاطع التمام ودالة القاطع ودالة قوس الجيب ودالة قوس جيب التمام ودالة قوس الظل..

تعريف ١٢: نقول عن دالة $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ أنها دورية ذات دور $p > 0$ إذا كان: $f(x+p) = f(p)$ من أجل أي عدد حقيقي $x \in D_f$ (و p أصغر ما يمكن)، أي أن قيم الدالة تتكرر بشكل منتظم.

تعريف ١٣: إذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية وكان x مقياس أحدى زاويتيه غير القائمتين فإن:

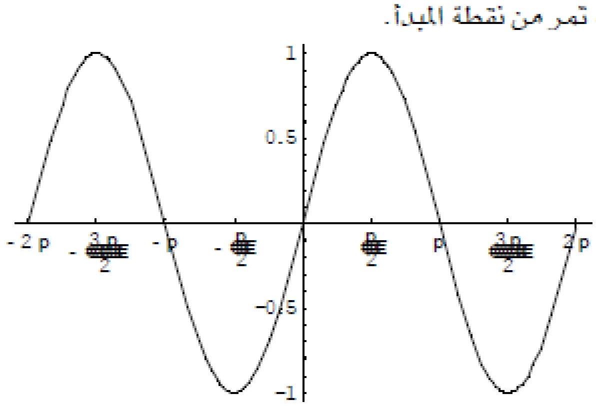
$\sin x$ هو حاصل قسمة طول الضاع المقابل للزاوية غير الوتر على طول الوتر،

و $\cos x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية غير الوتر على طول الوتر.

١,٦. دالة الجيب

ويرمز لها بالرمز: sin وهي من الشكل: $\sin : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \sin x$. معممة لمقياس أية زاوية..

يمكن تمثيلها بموجة تمر من نقطة المبدأ.



٢,٦. دالة جيب التمام

ويرمز لها بالرمز: cos وهي من الشكل: $\cos : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \cos x$. معممة لمقياس أية زاوية..

ومن خواصها:

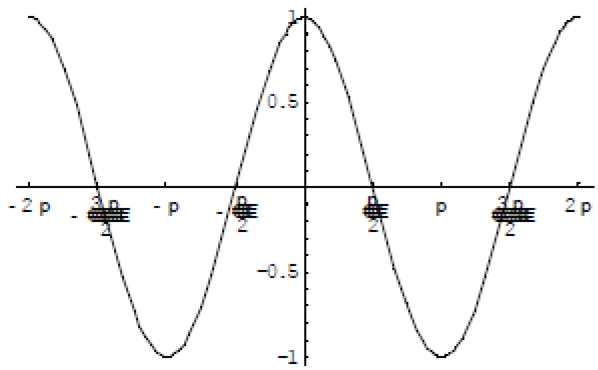
١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = [-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1 \le \cos x \le 1$ ...

٣) $\cos(-x) = \cos x$ أي أنها زوجية.

٤) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها بموجة لا تمر من نقطة المبدأ.



٤,٦. الدوال اللوغاريتمية

ويرمز لها بالرمز: $\log_b$ وهي من الشكل: $\log_b : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \log_b x$ إذا كان $x = b^y$ و $b \neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت..

ومن خواصها:

٠) $\log_b(b^x) = x$ و $b^{\log_b x} = x$ أي أنها تسمح لنا بالتخلص من الدالة الأسية الموافقة لها والعكس.

١) $D_f = (0, \infty)$ أي أنها ليست معرفة إلا للأعداد الموجبة.

٢) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) ومن حالاتها الخاصة كثرة الإستعمال: دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x = \log_e x$ حيث $e \cong 2.71828$.وهي متزايدة ببطء أي أن قيمها تكبر ببطء ولذلك تستخدم لتمثيل الأعداد الكبيرة. وكذلك تتجه قيمها إلى الأعداد السالبة الصغيرة جدا كلما صغرت قيم x .

٥) قانون تغيير الأساس للدوال اللوغاريتمية: $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b}$.

Important relationship between the sine and the cosine

From Pythagoras's theorem, looking at the diagram in Figure 5.4, we have $x^2 + y^2 = r^2$. Dividing both sides by r^2 we get:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

and using the definitions of

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r} \quad \text{and} \quad \sin(\alpha) = \frac{y}{r}$$

we get

$$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$$

and this is written in shorthand as

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

where $\cos^2(\alpha)$ means $(\cos(\alpha))^2$.

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t)$$
$$\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(t).$$

Other relationships can be shown using triangles as in Figure 5.8 giving

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha) \text{ and } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha).$$

From Pythagoras theorem we also have that

$$a^2 + b^2 = r^2,$$

dividing both sides by r^2 we get

$$\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} = 1,$$

and using the definitions of $\sin(\alpha) = a/r$ and $\cos(\alpha) = b/r$, we get

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Rearranging this, we have $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$ or $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$.

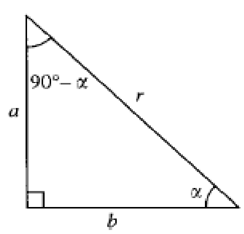


Figure 5.8 *(a)* $\sin(\alpha) = a/r$ *and* $\cos(90° - \alpha) = a/r$. *Then* $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$. *As the cosine is an even function* $\cos(90° - \alpha) = \cos(-(90° - \alpha)) = \cos(\alpha - 90°)$ *which confirms that* $\cos(\alpha - 90°) = \sin(\alpha)$. $\cos(\alpha) = b/r$ *and* $\sin(90° - \alpha) = b/r$, *so* $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$.

Example Given $\sin(A) = 0.5$ and $0 \leqslant A \leqslant 90°$, use trigonometric identities to find:

(a) $\cos(A)$
(b) $\sin(90° - A)$
(c) $\cos(90° - A)$.

(a) Using $\cos^2(A) = 1 - \sin^2(A)$ and $\sin(A) = 0.5$

$$\Rightarrow \quad \cos^2(A) = 1 - (0.5)^2 = 0.75$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(A) \approx \pm 0.866.$$

As A is between 0° and 90°, the cosine must be positive giving $\cos(A) \approx 0.866$.

(b) As $\sin(90° - A) = \cos(A), \sin(90° - A) \approx 0.866$.

(c) As $\cos(90° - A) = \sin(A), \cos(90° - A) = 0.5$.

The functions $A\cos(at + b) + B$ and $A\sin(at + b) + B$

The graph of these functions can be found by using the ideas of Chapter 2 for graph sketching.

Example Sketch the graph of y against t, where

$$y = 2\cos\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

The stages in sketching this graph are shown in Figure 5.9.

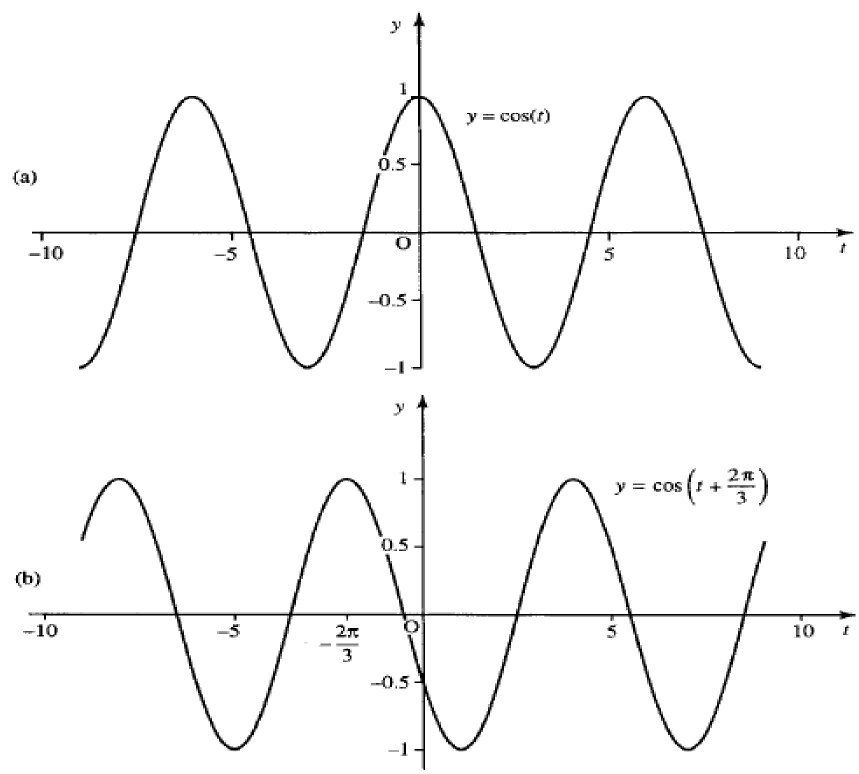


Figure 5.9 *Sketching the graph of $2\cos(2t + 2\pi/3)$: (a) start with $y = \cos(t)$; (b) shift to the left by $2\pi/3$ to give $y = \cos(t + (2\pi/3))$; (c) squash the graph in the t-axis to give $y = \cos(2t + (2\pi/3))$; (d) stretch the graph in the y-axis giving $y = 2\cos(2t + (2\pi/3))$.*

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$$
$$\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B)$$
$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan(A) \pm \tan(B)}{1 \mp \tan(A)\tan(B)}$$
$$\sin(X) + \sin(Y) = 2\sin\left(\tfrac{1}{2}(X+Y)\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(X-Y)\right)$$
$$\sin(X) - \sin(Y) = 2\cos\left(\tfrac{1}{2}(X+Y)\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}(X-Y)\right)$$
$$\cos(X) + \cos(Y) = 2\cos\left(\tfrac{1}{2}(X+Y)\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(X-Y)\right)$$
$$\cos(X) - \cos(Y) = -2\sin\left(\tfrac{1}{2}(X+Y)\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}(X-Y)\right)$$
$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$$
$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$$
$$\tan(2A) = \frac{2\tan(A)}{1 - \tan(A)}$$
$$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$$
$$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$$
$$\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$$
$$\cos^2(A) = \tfrac{1}{2}(\cos(2A) + 1)$$
$$\sin^2(A) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2A))$$
$$\cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(A)$$
$$\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(A)$$

Example Using $\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$ and $\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$, show that $\cos^2(A) = \frac{1}{2}(\cos(2A) + 1)$.

Solution From $\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$, $\sin^2(A) = 1 - \cos^2(A)$ (subtracting $\cos^2(A)$ from both sides).

Substitute this into

$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$$
$$\cos(2A) = \cos^2(A) - (1 - \cos^2(A))$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(2A) = \cos^2(A) - 1 + \cos^2(A)$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(2A) + 1 = 2\cos^2(A) \quad \text{(adding 1 on to both sides)}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos^2(A) = \tfrac{1}{2}(\cos(2A) + 1) \quad \text{(dividing by 2)}$$

Hence

$$\cos^2(A) = \tfrac{1}{2}(\cos(2A) + 1)$$

خواص الدوال اللوغاريتمية :

$$Y= Ln(x_1 . x_2) = Lnx_1 + lnx_2$$

$$Y= Ln\frac{x1}{x2} = Lnx_1 - Lnx_2$$

$$Y = Lnx^n = n\, Lnx$$

$$Y = Ln\,\frac{1}{x} = - Lnx$$

الدالة اللوغاريتمية عكس الدالة الاسية

وهناك نوعين من الدوال اللوغاريتمية وهي :

* الدوال اللوغاريتمية العشرية Log_{10}

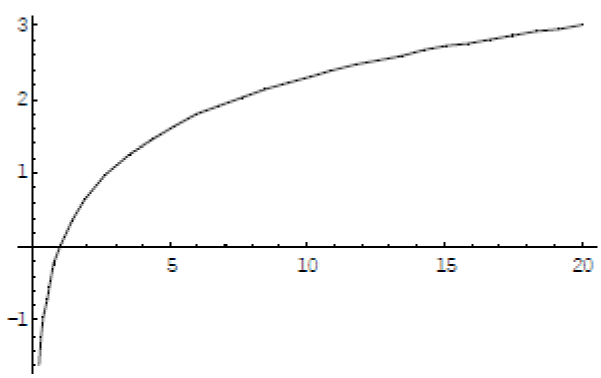
الدوال اللوغاريتمية الطبيعية Ln

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1*2}+\frac{1}{1*2*3}+\frac{1}{1*2*3*4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e \cong 2.718$$

مثال : مثل الدالة التالية: $y = \ln x$.

الحل:



الاختبار البعدي:

تمرين ١: بين بأن كلا من العلاقات التالية دوال:

1) $f: N \to N,\ f(x) = x^3$ 2) $f: N \to N,\ f(x) = \sqrt[3]{x}$

3) $f: R \to R,\ f(x) = x^3 + 1$ 4) $f: R \to R,\ f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$

تمرين ٢: حدد مجال كل دالة من التمرين ١ ومداها

تمرين ٣: حدد نوع كل دالة مما يلي (تطبيق، تباين، تغامر، تقابل):

1) $f: N \to N,\ f(x) = x^3$ 2) $f: N \to N,\ f(x) = \sqrt[3]{x}$

3) $f: R \to R,\ f(x) = x^3 + 1$ 4) $f: R \to R,\ f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$

5) $f: R \to R,\ f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$ 6) $f: R \to R,\ f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 + 1}$

تمرين 4: هل كلا مما يلي دالة فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

1) $f: R \to R,\ f(x) = \sin 2x$ 2) $f: R \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$

3) $f: R \to R,\ f(x) = e^{|x|}$ 4) $f: R \to R,\ f(x) = |x|$

تمرين 5: ما هو وجه الشبه بين الدوال الثابتة والخطية والتآلفية ووجه الفرق بينهم؟

تمرين 6: مثل كلا من الدوال التالية:

1) $f: R \to R,\ f(x) = \sin 2x$ 2) $f: R \to R,\ f(x) = e^{|x|}$ 3) $f: R \to R,\ f(x) = |x|$

تمرين 7: ما هو وجه الشبه بين دالتي الجيب وجيب التمام ووجه الفرق بينهما؟

تمرين 8

Find the values that cannot be input to the following functions, where the independent variable (x or r) is real:

(a) $y = 3\sqrt{x-2} + 5$

(b) $y = 3\log_{10}(2 - 4x)$

(c) $R = \dfrac{r + 1000}{1000(r-2)}$

الاسبوع السادس

الدالة الاسـية و دوال القطـع الزائـــــد

الدوال الأسية

وهي من الشكل: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $y=f(x)=b^x$ و $b\neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت..

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathbb{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f=[0,\infty)$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $b^x>0$ ..

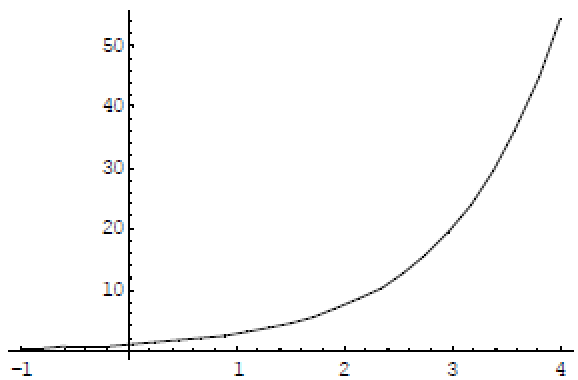
٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) ومن حالاتها الخاصة كثرة الإستعمال: دالة الأساس الطبيعي $y=e^x$ حيث $e\cong 2.71828$.وهي متزايدة بسرعة أي أن قيمها تكبر بسرعة ، وتقترب من الصفر كلما كانت قيم x سالبة.

٥) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b..

مثال : مثل الدالة التالية: $y=e^x$.

الحل:



الدوال الزائدية

The hyperbolic functions

Any function defined for both positive and negative values of x can be written as the sum of an even and odd function. That is, for any function $y = f(x)$ we can write

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x)$$

where

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

and

$$f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

The even and odd parts of the function e^x are given the names of hyperbolic cosine and hyperbolic sine. The names of the functions are usually shortened to $\cosh(x)$ (read as 'cosh of x') and $\sinh(x)$ (read as 'shine of x').

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$$

and

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

They are called the hyperbolic sine and cosine because they bear the same sort of relationship to the hyperbola as the sine and cosine do to the circle. When we introduced the trigonometric functions in Chapter 5 we used a rotating rod of length r. The horizontal and vertical positions of the tip of the rod as it travels around the circle defines the cosine and sine function, respectively. A point (x, y) on the circle can be defined using $x = r\cos(\alpha), y = r\sin(\alpha)$. These are called parametric equations for the circle and α is the parameter. If the parameter is eliminated then we get the equation of the circle

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

(shown in Figure 8.4(a)). Any point on a hyperbola can similarly be defined in terms of a parameter, α, and thus we get $x = a\cosh(\alpha)$ and $y = b\sinh(\alpha)$.

If the parameter is eliminated from the equations we get the equation for the hyperbola as

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Figure 8.5(b) shows the graph of the hyperbola.

The function $y = \tanh(x)$ is defined, similarly to the $\tan(x)$, as

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

and the reciprocal of these three main functions may be defined as

$$\mathrm{cosech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} \quad \text{(the hyperbolic cosecant)}$$

$$\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \quad \text{(the hyperbolic secant)}$$

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} \quad \text{(the hyperbolic cotangent)}$$

The graphs of $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, and $\tanh(x)$ are shown in Figure 8.6.

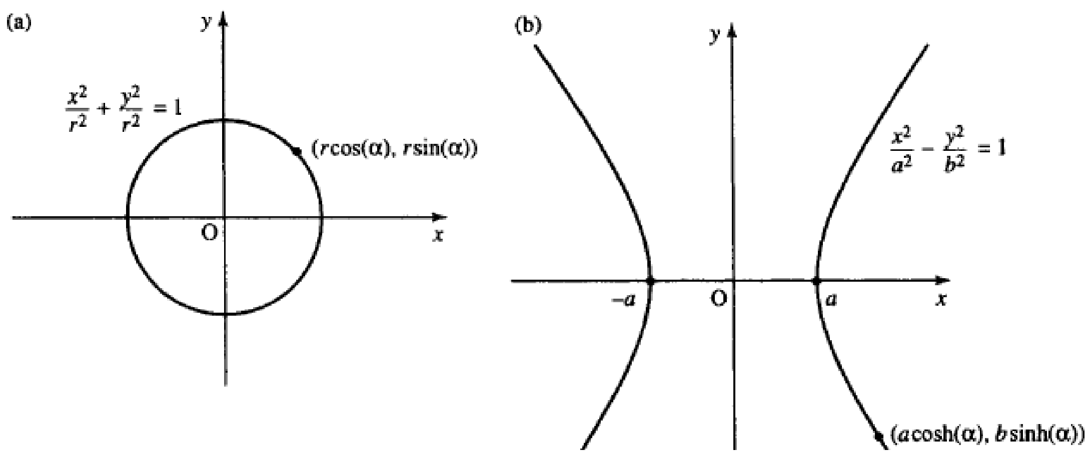


Figure 8.5 *(a) $x = r\cos(\alpha)$, $y = r\sin(\alpha)$ defines a point on the circle $x^2/r^2 + y^2/r^2 = 1$. (b) $x = a\cosh(\alpha)$ and $y = b\sinh(\alpha)$ defines a point on the hyperbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.*

Table 8.2 *Summary of important hyperbolic identities*

$\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$
$\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$
$\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$
$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$
$\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$
$\cosh(A \pm B) = \cosh(A)\cosh(B) \pm \sinh(A)\sinh(B)$
$\sinh(A \pm B) = \sinh(A)\cosh(B) \pm \cosh(A)\sinh(B)$
$\tanh(A \pm B) = (\tanh(A) \pm \tanh(B))/(1 \pm \tanh(A)\tanh(B))$

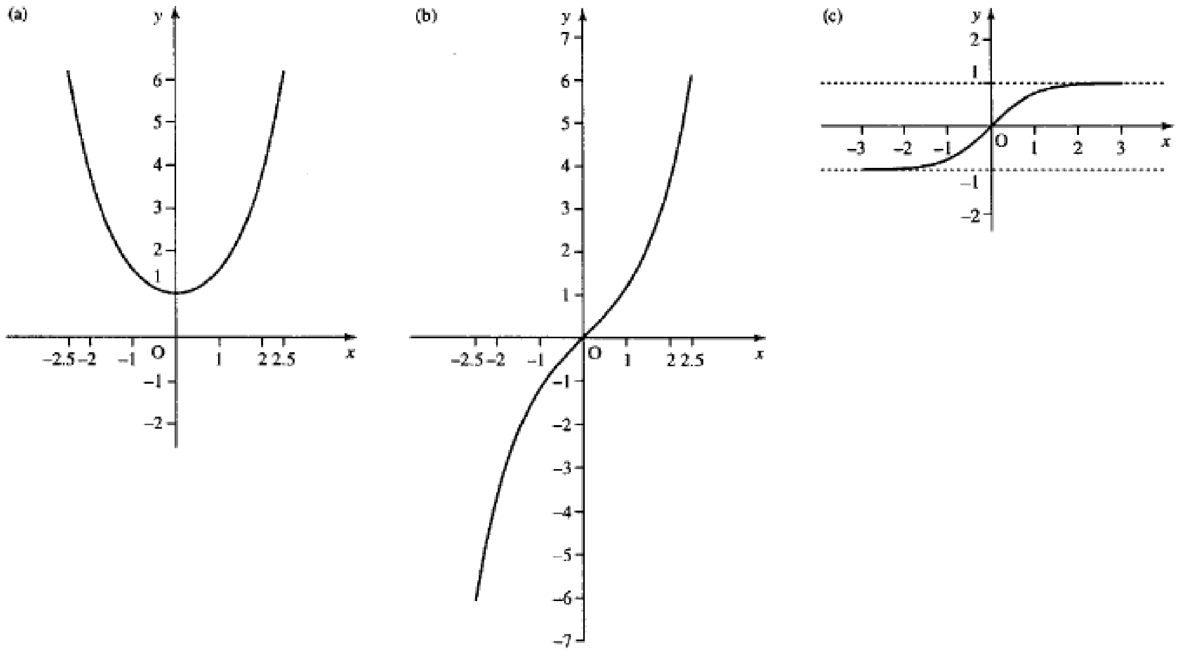


Figure 8.6 *(a) The graph of* $y = \cosh(x)$. *(b) The graph of* $y = \sinh(x)$. *(c) The graph of* $y = \tanh(x)$.

As the hyperbolic functions are defined in terms of the exponential function we might suspect that the inverse would be defined in terms of the logarithm. The logarithmic equivalences are

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{for all } x$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad x \geqslant 1$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad -1 < x < 1$$

Ex Show that $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ using the definitions

$$y = \sinh^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sinh(y) = x$$

and

$$\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Hyperbolic identities

The hyperbolic identities are similar to those for trigonometric functions. A list of the more important ones is given in Table 8.2.

Example 8.8 Show that $\cosh(A+B) = \cosh(A)\cosh(B) + \sinh(A)\sinh(B)$.

Solution Substitute

$$\cosh(A) = \frac{e^A + e^{-A}}{2}$$
$$\sinh(A) = \frac{e^A - e^{-A}}{2}$$
$$\cosh(B) = \frac{e^B + e^{-B}}{2}$$
$$\sinh(B) = \frac{e^B - e^{-B}}{2}$$

into the right-hand side of the expression

$$\cosh(A)\cosh(B) + \sinh(A)\sinh(B)$$
$$= \frac{(e^A + e^{-A})}{2}\frac{(e^B + e^{-B})}{2}\frac{(e^A - e^{-A})}{2}\frac{(e^B - e^{-B})}{2}.$$

Multiplying out the brackets gives

$$\tfrac{1}{4}\Big(e^{A+B} + e^{A-B} + e^{-A+B} + e^{-(A+B)}$$
$$+(e^{A+B} - e^{A-B} - e^{-A+B} + e^{-(A+B)})\Big).$$

Simplifying then gives

$$\tfrac{1}{4}(2e^{A+B} + 2e^{-(A+B)}) = \tfrac{1}{2}(e^{A+B} + e^{-(A+B)})$$

which is the definition of $\cosh(A+B)$.

We have shown that the right-hand side of the expression is equal to the left-hand side, and therefore

$$\cosh(A+B) = \cosh(A)\cosh(B) + \sinh(A)\sinh(B).$$

Calculations

The hyperbolic and inverse hyperbolic functions are often not given in a calculator. To calculate a hyperbolic function then use the definitions

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

To calculate the inverse hyperbolic functions use their logarithmic equivalences.

الاختبار البعدي

1- Using the definitions of

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

and

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

show that

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(b) $\sinh(x - y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$

2- Calculate the following and where possible use the appropriate inverse functions to check your result:

(a) $\cosh(2.1)$ (b) $\tanh(3)$

الاسبوع السابع

Limits الغايـــــــات

A function $f(z)$ is said to have the **limit** l as z approaches a point z_0, written

(1) $$\lim_{z \to z_0} f(z) = l,$$

if f is defined in a neighborhood of z_0 (except perhaps at z_0 itself) and if the values of f are "close" to l for all z "close" to z_0; in precise terms, if for every positive real ϵ we can find a positive real δ such that for all $z \neq z_0$ in the disk $|z - z_0| < \delta$ (Fig. 330) we have

(2) $$|f(z) - l| < \epsilon;$$

geometrically, if for every $z \neq z_0$ in that δ-disk the value of f lies in the disk (2).

Formally, this definition is similar to that in calculus, but there is a big difference. Whereas in the real case, x can approach an x_0 only along the real line, here, by definition, z may approach z_0 ***from any direction*** in the complex plane. This will be quite essential in what follows.

If a limit exists, it is unique. (See Team Project 26.)

A function $f(z)$ is said to be **continuous** at $z = z_0$ if $f(z_0)$ is defined and

(3) $$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Note that by definition of a limit this implies that $f(z)$ is defined in some neighborhood of z_0.

$f(z)$ is said to be *continuous in a domain* if it is continuous at each point of this domain.

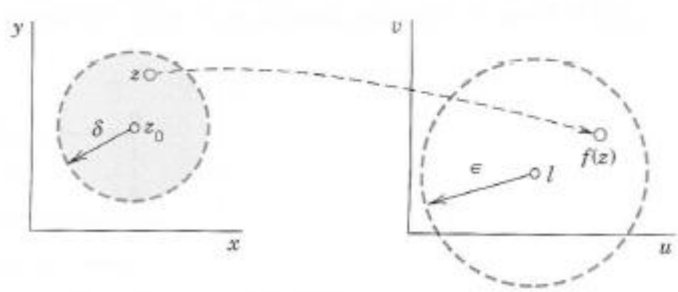


Fig. 330. Limit

Derivative

The **derivative** of a complex function f at a point z_0 is written $f'(z_0)$ and is defined by

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{4}$$

provided this limit exists. Then f is said to be **differentiable** at z_0. If we write $\Delta z = z - z_0$, we have $z = z_0 + \Delta z$ and (4) takes the form

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{4'}$$

Now comes an ***important point.*** Remember that, by the definition of limit, $f(z)$ is defined in a neighborhood of z_0 and z in (4′) may approach z_0 from any direction in the complex plane. Hence differentiability at z_0 means that, along whatever path z approaches z_0, the quotient in (4′) always approaches a certain value and all these values are equal. This is important and should be kept in mind.

EXAMPLE 3 Differentiability. Derivative

The function $f(z) = z^2$ is differentiable for all z and has the derivative $f'(z) = 2z$ because

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

*The **differentiation rules** are the same as in real calculus,* since their proofs are literally the same. Thus for any analytic functions f and g and constants c we have

$$(cf)' = cf', \quad (f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

as well as the chain rule and the power rule $(z^n)' = nz^{n-1}$ (n integer).

Also, if $f(z)$ is differentiable at z_0, it is continuous at z_0. (See Team Project 26.)

EXAMPLE 4 $\bar{z}$ not Differentiable

It may come as a surprise that there are many complex functions that do not have a derivative at any point. For instance, $f(z) = \bar{z} = x - iy$ is such a function. To see this, we write $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ and obtain

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{5}$$

If $\Delta y = 0$, this is $+1$. If $\Delta x = 0$, this is -1. Thus (5) approaches $+1$ along path I in Fig. 331 but -1 along path II. Hence, by definition, the limit of (5) as $\Delta z \to 0$ does not exist at any z.

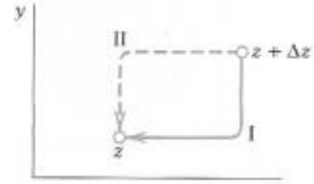


Fig. 331. Paths in (5)

PROOF By assumption, the derivative $f'(z)$ at z exists. It is given by

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{2}$$

The idea of the proof is very simple. By the definition of a limit in complex (Sec. 13.3) we can let Δz approach zero along any path in a neighborhood of z. Thus we may choose the two paths I and II in Fig. 332 and equate the results. By comparing the real parts we shall obtain the first Cauchy–Riemann equation and by comparing the imaginary parts the second. The technical details are as follows.

We write $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Then $z + \Delta z = x + \Delta x + i(y + \Delta y)$, and in terms of u and v the derivative in (2) becomes

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{3}$$

We first choose path I in Fig. 332. Thus we let $\Delta y \to 0$ first and then $\Delta x \to 0$. After Δy is zero, $\Delta z = \Delta x$. Then (3) becomes, if we first write the two u-terms and then the two v-terms,

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}.$$

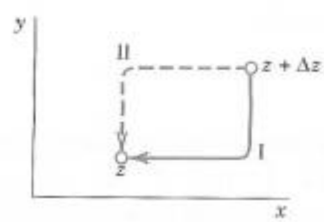


Fig. 332. Paths in (2)

Since $f'(z)$ exists, the two real limits on the right exist. By definition, they are the partial derivatives of u and v with respect to x. Hence the derivative $f'(z)$ of $f(z)$ can be written

$$f'(z) = u_x + iv_x. \tag{4}$$

Similarly, if we choose path II in Fig. 332, we let $\Delta x \to 0$ first and then $\Delta y \to 0$. After Δx is zero, $\Delta z = i\Delta y$, so that from (3) we now obtain

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}.$$

Since $f'(z)$ exists, the limits on the right exist and give the partial derivatives of u and v with respect to y; noting that $1/i = -i$, we thus obtain

$$f'(z) = -iu_y + v_y. \tag{5}$$

The existence of the derivative $f'(z)$ thus implies the existence of the four partial derivatives in (4) and (5). By equating the real parts u_x and v_y in (4) and (5) we obtain the first Cauchy–Riemann equation (1). Equating the imaginary parts gives the other. This proves the first statement of the theorem and implies the second because of the definition of analyticity. ■

Formulas (4) and (5) are also quite practical for calculating derivatives $f'(z)$, as we shall see.

EXAMPLE 1 Cauchy–Riemann Equations

$f(z) = z^2$ is analytic for all z. It follows that the Cauchy–Riemann equations must be satisfied (as we have verified above).

For $f(z) = \bar{z} = x - iy$ we have $u = x$, $v = -y$ and see that the second Cauchy–Riemann equation is satisfied, $u_y = -v_x = 0$, but the first is not: $u_x = 1 \neq v_y = -1$. We conclude that $f(z) = \bar{z}$ is not analytic, confirming Example 4 of Sec. 13.3. Note the savings in calculation! ■

The Cauchy–Riemann equations are fundamental because they are not only necessary but also sufficient for a function to be analytic. More precisely, the following theorem holds.

الاسبوع الثامن

المتواليات

SEQUENCE

يستعمل لفظ المتواليه لوصف حالة من المقادير الخاضعه لبعض القواعد الرياضيه مثلا :

أ ـ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ... حيث ان كل حد ناتج من اضافة واحد الى الحد السابق له

ب ـ ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ حيث ان كل حد يعادل نصف الحد السابق له .

ج ـ ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ حيث ان مقام كل حد في الكسر معطى حسب موقعه في التسلسل .

د ـ ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ... حيث ان كل حد مربع موقعه في التسلسل وهذا يعني ان قيمة الحد النوني يساوي $ن^{٢}$.

وليس من السهولة في بعض الحالات تمييز المتواليه . فمثلا :

هـ ـ ٢ ، ٥ ، ١٠ ، ١٧ ، ٢٦ ، يمكن كتابتها على الصورة التاليه :

(١ + ١) ، (١ + ٤) ، (١ + ٩) ، (١ + ١٦) ، (١ +٢٥) ..

ومن ذلك نلاحظ ان الحد النوني يساوى $(١ + ن^{٢})$

من هذه الامثله نستنتج انه من الممكن تكوين اية متواليه . اذا علما حدها الاول والقانون الذي يربط حدودها ببعضها ..

ومن ذلك يمكن ان نستنتج مثلا ان الحد العاشر = أ + (١٠ ـ ١) د

وبصورة عامة فان الحد النوني = أ + (ن ـ ١) د

وتكتب المتوالية على صيغة

أ ، أ + د ، أ + ٢ د ، ...... ، أ + (ن ـ ١) د ، ......

ولايجاد مجموع حدود متسلسلة عدد حدودها (ن) وحدها الاول (أ) واساسها د

نفرض ان المجموع يرمز له بالحرف جـ

∴ جـ = أ + (أ + د) + (أ + ٢د) ..... + [أ + (ن ـ ٢)د] + [أ + (ن ـ ١)د]

جـ = [أ + (ن ـ ١)د] + [أ + (ن ـ ٢)د] + ... + (أ + د) + أ

وبالجمع ينتج ٢ جـ = ن [٢ أ + (ن ـ ١) د]

∴ جـ = ن/٢ [٢ أ + (ن – ١) د] .... (١)

وحيث ان الحد النوني هو الحد الاخير ويرمز له بالحرف (ل)

وان ل = أ + (ن – ١) د .... (٢)

∴ يمكن كتابة القانون (١) على الشكل

جـ = ن/٢ [أ + أ + (ن – ١) د]

= ن/٢ (أ + ل) .... (٢)

مثال ١ :

ما هو عدد حدود المتوالية العددية التي حدها الاول (– ١) وأساسها (٢) وحدها الاخير (١١)

الحل :

ل = أ + (ن – ١) د .... (٢)

∴ ١١ = – ١ + (ن – ١) ٢

١١ = – ١ + ٢ ن – ٢

١٤ = ٢ ن

∴ ن = ٧ عدد حدود المتواليه

مثال ٢ :

ما هو مجموع حدود المتواليه في المثال ١

الحل :

يمكن استعمال القانون (١) في ايجاد مجموع الحدود حيث ان

جـ = ن/٢ [٢ أ + (ن – ١) د] .... (١)

∴ جـ = ٧/٢ (– ٢ + ٦ × ٢)

∴ جـ = ٧/٢ × ١٠ = ٣٥

كما يمكن استعمال القانون (٣) في ايجاد مجموع حدود المتوالية حيث ان :

جـ = ن/٢ (أ + ل) .... (٣)

∴ جـ = ٧/٢ (– ١ + ١١)

∴ = ٧/٢ × ١٠ = ٣٥

الوسط الحسابي :

عندما نتكلم عن الوسط فهذا لا بد ان يعني المعدل بين كميتين فمثلا العدد (٢٠) هو الوسط بين (١٠ ، ٣٠) ولكن هناك بعض الاختلاف عندما يكون المطلوب مثلا ادخال ١٦ وسطا حسابيا بين العدد صفر والعدد (٣٤)، ان هذا يعني وضع (١٦) عددا بين الصفر، ٣٤ بحيث ان التسلسل الناتج من ١٨ حد يكون متواليه عدديه حيث ان

٣٤ = أ + ١٧ د

∴ ٣٤ = صفر + ١٧ د

∴ د = ٢

∴ الاوساط العددية هنا هي ٢ ، ٤ ، ٦ ...... ٣٢

مثال ٣ :

استنتج قانون لايجاد مجموع حدود الاعداد الصحيحة من ١ الى ن

الحل :

في هذه الحالة فأن أ = ١ ، د = ١ ، ن = ن

∴ جـ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن – ١) د]

∴ جـ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن – ١) د]

= $\frac{ن}{٢}$ (٢ + ن – ١)

= $\frac{ن (ن + ١)}{٢}$

مثال ٤ :

ما هو مجموع اول خمسين عدد فردى ؟

الحل :

في هذه الحالة أ = ١ ، د = ٢ ، ن = ٥٠

جـ = $\frac{٥٠}{٢}$ (٢ + ٤٩ × ٢)

جـ = ٢٥ × ١٠٠

جـ = ٢٥٠٠

مثال

ما هو عدد حدود المتواليه العددية التي حدها الرابع هو (١١) وحدها التاسع (٢١) ومجموع حدودها (١٤٠)

الحل :

ل = أ + (ن − ١) د

∴ ٢١ = أ + ٨ د

١١ = أ + ٣ د

بالطرح ١٠ = ٥ د

∴ د = ٢

وبالتعويض عن د نستنتج ان

١١ = أ + ٦

∴ أ = ٥

∵ جـ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) د]

∴ ١٤٠ = $\frac{ن}{٢}$ [١٠ + ٢ (ن − ١)]

∵ جـ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) د]

∴ ١٤٠ = $\frac{ن}{٢}$ [١٠ + ٢ (ن − ١)]

١٤٠ = $\frac{ن}{٢}$ (٨ + ٢ ن)

١٤٠ = ٤ن + $ن^{٢}$

$ن^{٢}$ + ٤ ن − ١٤٠ = صفر

(ن + ١٤) (ن − ١٠) = صفر

∴ ن = − ١٤ غير معقول

ن = ١٠ عدد الحدود

المتواليات الهندسية

في هذا النوع من المتواليات فان كل حد فيها يتكون من الحد السابق له مضروبا بعدد ثابت يسمى اساس المتوالية ويرمز له بالحرف (ر) وعليه فان التسلسل

أ ، أر ، أر^{٢} ، أر^{٣} ، أر^{٤} ، .....

تسمى متواليه هندسية ولو لاحظنا الحد الثالث فقيمته أر^{٢} والحد الخامس هو أر^{٤} وعليه فيمكننا ان نستنتج ان الحد النوني هو أر$^{ن - ١}$ ولو فرضنا ان الحد الاخير في متواليه عدد حدودها (ن) هو ل فان ل = أر$^{ن - ١}$ .... (١)

وعليه فاذا كان عدد حدود المتوالية هو ن فان المتواليه هي

أ ، أر ، أر^{٢} ، ..... أر$^{ن - ١}$

مثال ١ :

جد مجموع حدود المتسلسلة ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ ..... الى ١٠ حدود

الحل :

هنا أ = ١ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠

$$\therefore \text{جـ} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}}$$

$$\therefore \text{جـ} = \frac{١\,[\,١ - (١/٢)^{١٠}\,]}{١ - ١/٢}$$

$$\text{جـ} = ٢\left(١ - \frac{١}{١٠٢٤}\right) = ١\frac{٥١١}{٥١٢}$$

مثال ٢ :

جد مجموع المتسلسلة ١ + ٣ + ٩ + ٢٧ ..... الى ٨ حدود

الحل :

أ = ١ ، ر = ٣ ، ن = ٨

$$\because \text{جـ} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$$

$$\therefore \text{جـ} = \frac{١(٣^{٨} - ١)}{٣ - ١} = \frac{١}{٢}(٦٥٦١ - ١) = 3280$$

الوسط الهندسي

ان القول بان (س) هي وسط هندسي بين (أ ، ب) يعني ان $س^2 = أ ب$ اى ان (س) = $\sqrt{أ ب}$

وعليه، فان الوسط الهندسي بين العددين ٤ ، ٩ يساوى $\sqrt{٣٦}$ ويساوى ٦، بينما الوسط الحسابي هو $\frac{٤ + ٩}{٢}$ = ٦٫٥ اذا كان المطلوب ادخال (٨) اوساط هندسية بين العددين ٢ ، ١٠٢٤ فهذا يعني ايجاد متوالية هندسية من ١٠ حدود يكون فيها الحد الاول يساوى ٢ والحد العاشر يساوى (١٠٢٤) ٠٠٠٠٠

$\therefore$ ١٠٢٤ = ٢ × $ر^{٩}$

$ر^{٩}$ = ٥١٢

$\therefore$ ر = ٢

$\therefore$ الاوساط الهندسية هي ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ١٢٨ ، ٢٥٦ ، ٥١٢

مثال ٣ :

متوالية هندسية مكونة من (١٠) حدود حدها الرابع هو (١٦) وحدها السابع هو (١٢٨) جد اساسها ، حدها الاول ، ومجموع حدودها :

الحل :

$\therefore$ قيمة المبلغ في السنة العاشرة تصبح (٥٠٠) × $(\frac{٢٥}{٢٤})^{٩}$ = ٧٢١٫٦

١٢٨ = $أ ر^{٦}$

١٦ = $أ ر^{٣}$

بالقسمة ٨ = $ر^{٣}$

$\therefore$ ر = ٢ الاساس

١٦ = أ $(٢)^{٣}$

$\therefore$ أ = ٢ الحد الاول

جـ = $\frac{٢(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١}$

= ٢ × ١٠٢٣ = ٢٠٤٦

مثال ٤ :

وضع مبلغ ٥٠٠ دينار في مصرف بربح مركب سنوى قدره ($٤\frac{١}{٦}$ ٠/٠) احسب قيمة هذا المبلغ في السنة العاشرة :

الحل :

ان ١٠٠ دينار بعد مرور سنة واحدة تصبح ١٠٠ + $٤\frac{١}{٦}$

= ١٠٠ ($١ + \frac{١}{٢٤}$)ويساوى ١٠٠ × $\frac{٢٥}{٢٤}$

بعد مرور سنتين تصبح = $100 \times \left(\frac{25}{24}\right)^2$

∴ قيمة المبلغ في السنة العاشرة تصبح $(500) \times \left(\frac{25}{24}\right)^9 = 721.6$

مثال

في المثال السابق (٤) اذا بقي المبلغ في المصرف حتى اصبحت قيمته ١٠٠٠ دينار ما هي عدد السنوات التي بقي فيها هذا المبلغ في المصرف ؟

الحل :

بعد ن من السنوات فان ٥٠٠ دينار تصبح $500 \times \left(\frac{25}{24}\right)^{ن-1}$

$$\therefore 500 \times \left(\frac{25}{24}\right)^{ن-1} = 1000$$

$$\left(\frac{25}{24}\right)^{ن-1} = 2$$

$$(ن-1)\ \text{لو}\ \frac{25}{24} = \text{لو}\ 2$$

$$(ن-1)\ [\text{لو}\ 25 - \text{لو}\ 24] = \text{لو}\ 2$$

$$(ن-1)\ (1.3979 - 1.3802) = 0.3010$$

$$ن-1 = \frac{0.3010}{0.0177} = 17$$

∴ ن = ١٨ سنة

الاختبار البعدي:

١ – جد الحد النوني للمتواليات التالية

أ – $5\frac{1}{3}$ ، $-2\frac{1}{3}$ ، $-9\frac{1}{3}$

ب – ٣ ، ٥ ، ٧ ...

ج – ٢ ، –٤ ، ٨

٢ – جد الحد الاخير والمجموع للمتواليات المعطى عدد حدودها كما يلي :

أ – ١٠ ؛ $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$

ب – ٨ ؛ ٢ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{8}$

٣ – اذا كان الحد الثالث والحد العاشر في متواليه عددية هما –٢ ، ٥ على التوالي وكان عدد حدودها (١٠) جد حدها الاول والاساس والمجموع .

٤ – ادخل (٦) اوساط حسابيه بين ٢ ، ٢٤

٥ – اذا كان الحد الثالث والتاسع في متواليه هندسية هما ١٢ ، ٧٦٨ على التوالي جد الحدود السته الاولى في هذه المتواليه .

٦ – متواليه هندسيه مكونه من (٨) حدود ، حدها الاول (٣) والاخير (٣٨٤) جد مجموعها .

٧ – سته سرع على شكل متواليه هندسيه تغيرت من ٣٢ دوره/ثا الى ٢٤٣ دورة/ثا ما هي سرعها الوسطيه .

٨ – تحرك جسم بخط مستقيم بسرعة ٤م/ثا وبعد ثانية واحدة تقلصت سرعته الى ٢م/ثا ونفس الشيء حدث بعد مرور كل ثانية اى نصف السرعة السابقة ، ما هي المسافة النهائية التي يمكن ان يقطعها الجسم .

الاسبوع التاسع

التفاضل ,المشتقة, مشتقة الدوال الجبرية

تعريف ١

ليكن I مجالا من $\Re$ ، x_0 نقطة من I ، $I \neq \{x_0\}$ و $f : I \to \Re$

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$ و تسمى b مشتقة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f'(x_0)$

و نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من I

وتسمى الدالة

$$f' : I \to \Re$$
$$x \to f'(x)$$

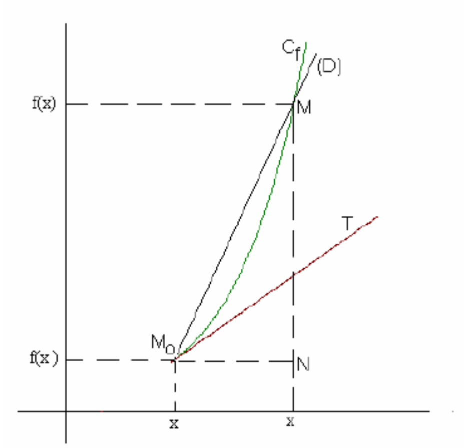
بالمشتقة الأولى للدالة f

ملاحظة١: f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي b و تابع ε لمتغير حقيقي بحيث من

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + bh + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

ملاحظة٢: $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$

١. التفسير الهندسي لمفهوم المشتقة



مشتقة f عند x_0 هو ميل المماس للمنحنى C_f الممثل لـ f عند

النقطة M_0 ذات الإحداثية $(x_0, f(x_0))$

$$(D) \text{ ميل المستقيم } = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\overline{NM}}{M_0 N}$$

٢. تعريف المشتقة

إذا كانت الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن المشتقة الأولى للدالة $y=f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ويرمز لها بإحد الرموز التالية:

$$\frac{dy}{dx} \text{ أو } \frac{df}{dx} \text{ أو } \frac{d}{dx}[f(x)] \text{ أو } f'(x) \text{ أو } y'$$

مثال ١: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x)=x^2+2$

الحل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+2-(x^2+2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+2)-(x^2+2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\Delta x=2x$$

مثال ٢: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x)=1-x^2$

الحل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-(x+\Delta x)^2-(1-x^2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-x^2-2x\Delta x-(\Delta x)^2-1+x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-2x-\Delta x=-2x$$

مثال ٣: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $w=1.2-0.3m^2$

الحل:

$$w'=\frac{dw}{dm}=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{f(m+\Delta m)-f(m)}{\Delta m}=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{(1.2-0.3(m+\Delta m)^2)-(1.2-0.3m^2)}{\Delta m}$$

$$=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{1.2-0.3m^2-0.6m\Delta m-0.3(\Delta m)^2-1.2+0.3m^2}{\Delta m}$$

$$=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{-0.6m\Delta m-0.3(\Delta m)^2}{\Delta m}=\lim_{\Delta m\to 0}-0.6m-0.3\Delta m=-0.6m$$

٣. القوانين العامة للمشتقات

القانون ١: اشتقاق الدوال ذات الأس n

لتكن الدالة: $y = f(x) = x^n$

فإن $y' = nx^{n-1}$

مثال ٧: إذا كانت $y = x^3$

فإن $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$

القانون ٢: مشتق الدالة الثابتة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هو $y' = 0$

مثال ٩: إذا كانت $y = 7$ فإن $y' = 0$ و إذا كانت $y = -5$ فإن $y' = 0$

القانون ٣: مشتق الدالة $y = ax^n$ هو $y' = nax^{n-1}$

مثال ١٠: إذا كانت $y = 3x^6$

فإن $y' = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$

مثال ١١: أوجد مشتقة الدالة $y = 5\sqrt[3]{x}$

الحل:

لدينا $y = 5\sqrt[3]{x} = 5(x)^{\frac{1}{3}}$

إذاً $y' = \frac{1}{3} \times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

القانون ٤: مشتق مجموع أو فوارق دوال

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$ حيث $f_1, \ldots, f_n(x)$

دوال قابلة للاشتقاق فإن $F'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x_n)$

مثال ١٢: لتكن الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

فإن $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} = -12x^{-4} - 10x + 7$

القانون ٥: مشتق جداء دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x).f_2(x)$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$.فإن $F'(x) = f_1'(x)f_2(x) + f_2'(x)f_1(x)$

مثال ١٣: لتكن الدالة $F(x) = (3x-2)(4x+1)$

فإن $F'(x) = 3(4x+1) + 4(3x-2)$

القانون ٦: مشتق قسمة دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$ و $f_2(x) \neq 0$ فإن

$$F'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}$$

مثال ١٤: أوجد مشتقة الدالة $y = \dfrac{8x^7}{2x-1}$ حيث $x \neq \dfrac{1}{2}$

الحل:

لدينا $f_1(x) = 8x^7 \Rightarrow f_1'(x) = 7 \times 8x^{7-1} = 56x^6$ و $f_2(x) = 2x-1 \Rightarrow f_2'(x) = 2$

إذاً $F'(x) = \dfrac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2} = \dfrac{56x^6(2x-1) - 2 \times 8x^7}{(2x-1)^2} = \dfrac{56x^6(2x-1) - 16x^7}{(2x-1)^2}$

القانون ٧: مشتق الدالة التي تكتب على الشكل $F(x) = (f(x))^n$

إذا كانت $F(x) = (f(x))^n$ حيث $f(x)$ قابلة للاشتقاق فإن

$$F'(x) = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$

أي أن $F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{dF(x)}{df(x)}\dfrac{df(x)}{dx} = n(f(x))^{n-1} f'(x)$

مثال ١٥: أوجد مشتقة الدالة $y = F(x) = 4(2x^2 + 3x - 2)^2$

الحل:

لدينا $f(x) = (2x^2 + 3x - 2) \Rightarrow f'(x) = 4x + 3$

إذاً $y' = F'(x) = 2 \times 4(2x^2 + 3x - 2)^{2-1}(4x+3) = 8(2x^2 + 3x - 2)(4x+3)$

الاختبار البعدي

١) احسب باستعمال التعريف مشتقة الدوال التالية :

1) $y = x^2 + 4x - 3$

2) $y = \sqrt{x - 5}$

3) $y = 2\sqrt{t + 3}$

4) $y = -x^2 + 5x - 7$

5) $y = x^3 - 1$

6) $y = 2x - 7$

7) $y = 5 - +3t + 2t^2$

8) $y = 3t + 7$

2) أوجد المشتقة الأولى لما يلي:

1) $y = (2x^3 - 7)(3x^2)$

2) $y = \dfrac{2x^2 - 5}{3x}$

3) $y = \dfrac{2}{3x^2 - 7x + 4}$

4) $y = \dfrac{5}{4x^3 - 3x^2}$

5) $y = \dfrac{1}{x + 2} - x$

6) $y = \dfrac{(3x - 2)(x + 7)}{3x - 1}$

7) $y = \dfrac{3x^2}{(5x + 7)(2x - 1)}$

8) $y = (2x^4 - 1.9)^3$ $\square$

9) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 + 4}}{x^2(x - 2)^3}$

10) $y = (2x^3 - 4x + 7)^{-2}$

11) $y = \left(\dfrac{\sqrt{2x - 7}}{x^2}\right)^{-1}$

12) $y = \left(\dfrac{x - 1}{x + 2}\right)^{3/2}$

13) $y = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2 + 1.8}}$

14) $y = x^2\sqrt{x - 1}$

15) $y = \dfrac{1.9}{(2x + 4)^3}$

16) $y = \dfrac{(3 - 2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$ $\square$

17) $y = x^3(5x^2 + 1)^{\frac{-2}{3}}$

18) $y = 2x^{-3} + 7x^{-5}$

19) $y = (4x^2\sqrt{x^3})^{1/4}$

20) $y = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x^2 + 5}}$

الاسبوع العاشر

الدوال المنحنية ,الدوال القياسية, المشتقةذات المراتب العليا

We can now draw graphs of the functions for all input values t as in Figures 5.5–5.7.
These are all important examples of periodic functions. To show that the cos(t) or sin(t) function is periodic, translate the graph to the left or right by 2π. The resulting graph will fit exactly on top of the original untranslated graph. 2π is called the fundamental period as translating by 4π, 6π, 8π, etc. also results in the graph fitting exactly on top of the original function. The fundamental period is defined as the smallest period that has this property and all other periods are multiples of the fundamental period. This periodic property can be expressed using a letter, n, to represent any integer, giving

$$\sin(t + 2\pi n) = \sin(t)$$

$$\cos(t + 2\pi n) = \cos(t)$$

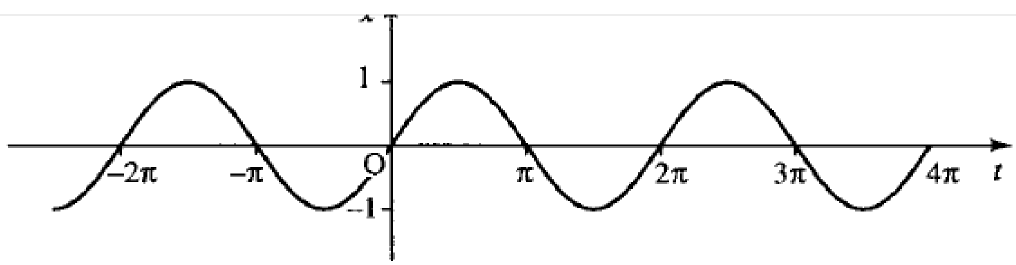


Figure 5.5 *The graph of* $y = \sin(t)$, *where t can take any value. Notice that the function repeats itself every* 2π. *This shows that the function is periodic with period* 2π. *Notice also that the value of* $\sin(t)$ *is never more than 1 and never less than* -1. *The function is odd as* $\sin(-t) = -\sin(t)$.

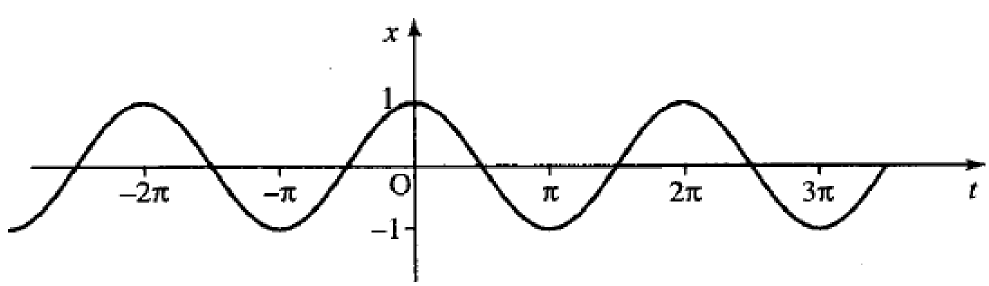
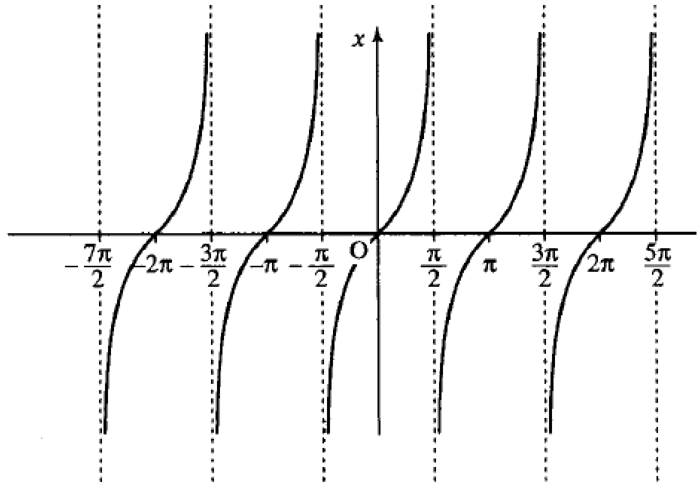
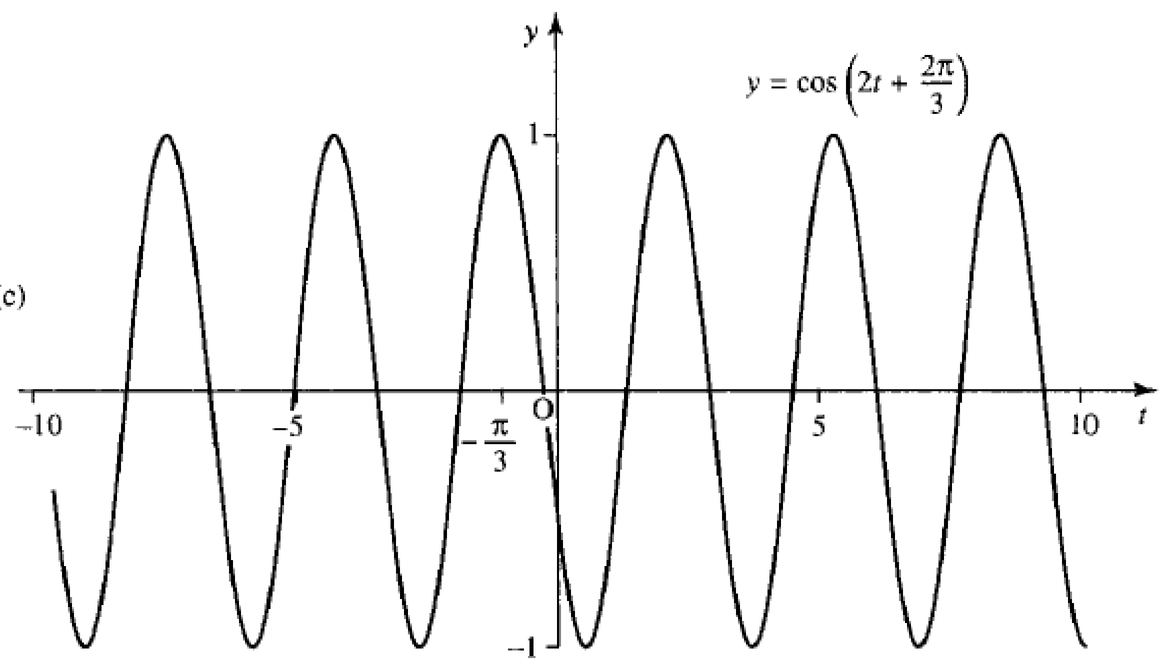


Figure 5.6 *The graph of* $x = \cos(t)$, *where t can take any value. Notice that the function repeats itself every* 2π. *This shows that the function is periodic with period* 2π. *Notice also that the value of* $\cos(t)$

Figure 5.7 *The graph of $z = \tan(t)$, where t can take any value except odd multiples of $\pi/2$ (for instance $\tan(t)$ is not defined for $t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$). Notice that the function repeats itself every π. This shows that the function is periodic with period π. The function values extend from $-\infty$ to ∞, that is, the range of $\tan(t)$ is all the real numbers. The function is odd as $\tan(-t) = -\tan(t)$.*



(c)



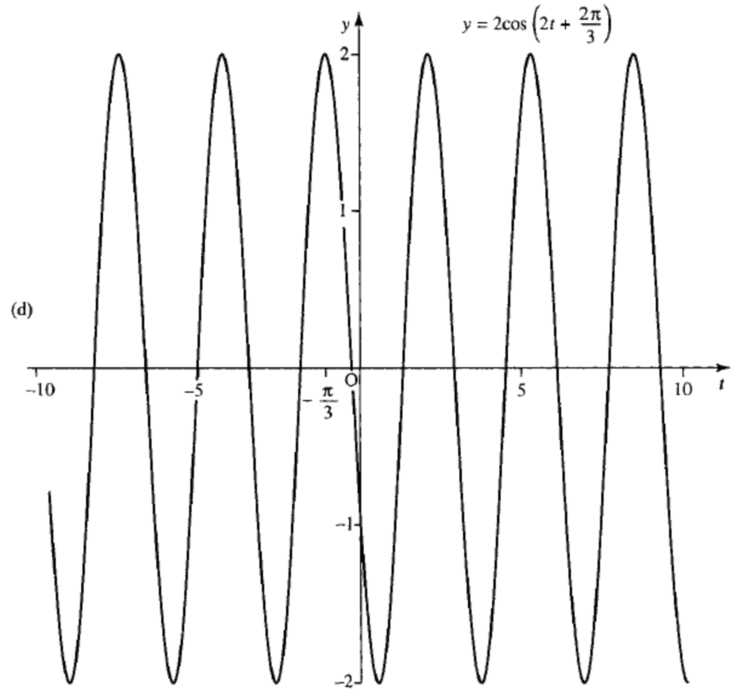
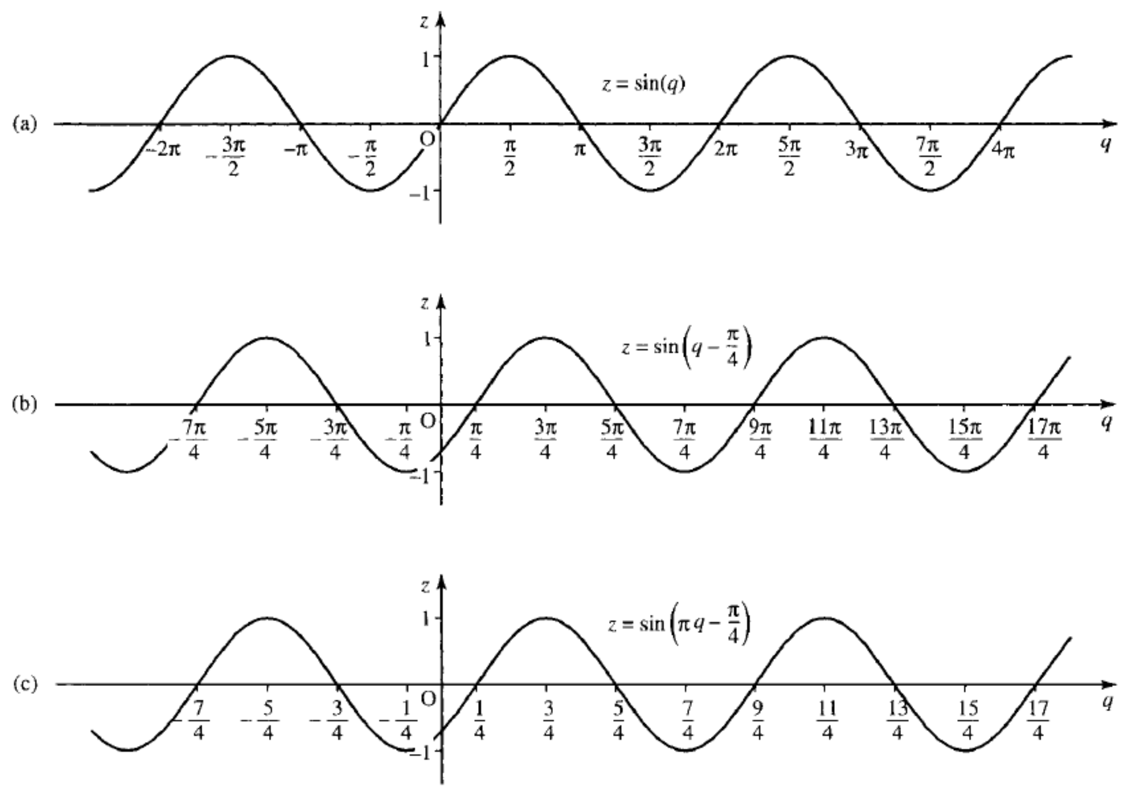


Figure 5.9 *Continued.*



الاختبار البعدي

(a) $y = 3\cos(t + 1)$; find the amplitude, frequency, period, angular frequency, and phase where t is expressed in seconds.
Compare $y = 3\cos(t + 1)$ with $y = A\cos(\omega t + \varphi)$. Then we can see that the angular frequency $\omega = 1$, the phase $\varphi = 1$, and the amplitude $A = 3$. As the frequency, $f = \omega/2\pi$, $f = 1/2\pi$, and the period $\tau = 1/f = 1/(1/2\pi) = 2\pi$ s.
(b) $V = 12\cos(314t + 1.6)$; find the amplitude, frequency, period, angular frequency, and phase where t is expressed in seconds.
Compare $V = 12\cos(314t + 1.6)$ with $V = A\cos(\omega t + \varphi)$. Then the angular frequency, $\omega = 314$, the phase $\varphi = 1.6$, and the amplitude A = 12. As $f = \omega/2\pi$, $f = 314/2\pi \approx 50$ Hz, and the period $\tau = 1/f = 1/50 = 0.02$ s.

الاسبوع الحادي عشر

مشتقة الدوال المثلثية , مشتقة الدوال اللوغارتمية .

قواعد إشتقاق الدوال المثلثية:

١) لتكن الدالة $y=\sin u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sin u)}{du}\frac{du}{dx}=\cos u\frac{du}{dx}$$

٢) لتكن الدالة $y=\cos u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\cos u)}{du}\frac{du}{dx}=-\sin u\frac{du}{dx}$$

مثال 1 تكن الدالة $y=\sin(2x^3-3)$

$$y'=3\times 2x^2\cos(2x^3-3)=6x^2\cos(2x^3-3)$$

: أوجد مشتقة الدالة $y=\cos(2\theta^3-3\theta^{-2})$

الحل:

لدينا $u=2\theta^3-3\theta^{-2}\Rightarrow\frac{du}{d\theta}=6\theta^2+6\theta^{-3}$

إذاً $y'=-(6\theta^2+6\theta^{-3})\sin(2\theta^3-3\theta^{-2})$

٣) لتكن الدالة $y=\tan u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\tan u)}{du}\frac{du}{dx}=\sec^2 u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٨: إذا كانت $y=\tan x^{-2}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

لدينا $u=x^{-2}\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2x^{-3}$

إذاً $y'=\frac{d(\tan u)}{dx}=\frac{du}{dx}\sec^2 u=-2x^{-3}\sec^2 x^{-2}$

٤) لتكن الدالة $y=\cot u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\cot u)}{du}\frac{du}{dx}=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

مثال : احسب مشتقة الدالة $y = \cot 3x$

الحل:

لدينا $u = 3x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3$

ومنه فإن $y' = \dfrac{d(\cot u)}{dx} = -\dfrac{du}{dx}\csc^2 u = -3\csc^2 3x$

٥) لتكن الدالة $y = \sec u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\sec u)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}\tan u \sec u$$

مثال : احسب مشتقة الدالة $y = \sec x\theta^2$

الحل:

لدينا $u = \theta^2 \Rightarrow \dfrac{du}{d\theta} = 2\theta$

ومنه $y' = \dfrac{d(\csc u)}{d\theta} = \dfrac{du}{d\theta}\tan u \sec u = 2\theta \tan\theta^2 \sec\theta^2$

٦) لتكن الدالة $y = \csc u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\csc u)}{du}\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u$$

مثال : احسب مشتقة الدالة $y = \csc x^3$

الحل: لدينا $u = x^3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3x^2$

$$y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u = -3x^2 \cot x^3 \csc x^3$$

مثال : احسب مشتقة الدالة $y = \csc(2x^5 - 3)$

الحل:

لدينا $u = 2x^5 - 3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 10x^4$

$$y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u = -10x^4 \cot(2x^5 - 3)\csc(2x^5 - 3)$$

قوانين اشتقاق الدوال اللوغارتمية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y = b\log_a u$ حيث $a > 0, a \neq 1$ ولتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x

فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = b\frac{u'}{u}\log_a e$$

مثال : احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 3\log(6x^5)$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي: $y' = \frac{3(30x^4)\log e}{6x^5} = \frac{15x^4}{x^5}\log e = \frac{15}{x}\log e.$

القانون ٢: إذا كانت لدينا الدالة $y = \ln u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = b\frac{u'}{u}$$

مثال : اشتق الدالة التالية: $y = e^{-x}\ln x^2$

الحل:

$$y' = -e^{-x}\ln x^2 + \frac{2x}{x^2}e^{-x} = \left(\frac{2}{x} - \ln x^2\right)e^{-x}$$

الاختبار البعدي

1 : احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \sin^5 3x^2$

2) $y = x \tan \dfrac{1}{x}$

3) $y = \sqrt{x} \cos 2x$

4) $y = \sqrt{\csc x^3}$

5) $y = \csc^3(-7x^4)$

6) $y = \sqrt{1 + \cos^2 x}$

7) $y = \tan^2(x^2 + 1)$

8) $y = (x^4 - \cot x)^3$

9) $y = \dfrac{\sin x^2}{\cos^2 x^2}$

10) $y = \sec(2x + 1)^{\frac{5}{2}}$

11) $y = \dfrac{1}{x^2 \sin^3 x}$

12) $y = (\sin x - \cos x)^2$

13) $y = \sin(\cos 2x)$

14) $y = \sqrt{1 + \sin x}$

15) $y = x \cot(-4x)$

16) $y = x \csc x$

2 احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \log_3(3x^2 - 5)$

2) $y = \ln(x + 3)^2$

3) $y = \ln^2(x + 3)$

4) $y = \ln(x^2 + 2)(x^2 + 3)$

5) $y = \ln \dfrac{x^4}{(3x - 4)^2}$

6) $f(x) = \ln \sin 3x$

7) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

8) $y = e^{-\frac{1}{2}x}$

9) $y = e^{x^2}$

10) $y = 5^{3x^2}$

11) $y = x^2 3^x$

13) $y = e^{-x} \ln x$

14) $y = e^{-2x} \sin 3x$

15) $f(x) = \ln \tan e^{x^2}$

16) $f(x) = \ln \sqrt{1 - 2x}$

الاسبوع الثاني عشر

مشتقة الدالة الاسية , مشتقة الدوال الزائدية

قوانين اشتقاق الدوال الأسية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y = ba^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$\frac{dy}{dt} = ba^u \ln a\, u'$$

مثال : اشتق الدالة المعرفة كما يلي: $y = 8\ 2^{(3x^2+4x+5)}$

$$y' = 8\ 2^{3x^2+4x+5} \ln 2\,(6x+4) = (48x+32)\ln 2\ 2^{3x^2+4x+5}$$

القانون ٢: اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس يساوي $e \cong 2{,}718$

إذا كانت لدينا الدالة $y = b\, e^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y' = \frac{dy}{dt} = b\, e^u\, u'$$

مثال : احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 8\ e^{2x+1}$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي: $y' = 8 \times 2\, e^{2x+1} = 16e^{2x+1}$

مثال : إذا كانت $y = -5\ e^{\sin x}$

فإن $y' = -5\ \cos x\, e^{\sin x}$

مشتقات الدوال الزائدة :

ناخذ الدالة ص = جاز ق

$\therefore$ من التعريف نستنتج ان

$$\text{ص} = \frac{1}{2}\left(\text{ه}^{\text{ق}} - \text{ه}^{-\text{ق}}\right)$$

فاذا كانت ق = د (س) حينئذ .

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{1}{2}\left(\text{ه}^{\text{ق}} + \text{ه}^{-\text{ق}}\right)\frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\text{جاز ق} = \text{جتاز ق}\ \frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٥)$$

وبنفس الطريقة نستنتج ان

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\text{جتاز ق} = \text{جاز ق}\ \frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦)$$

مثال (١) :

جد $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\text{طاز ق}$

الحل :

$$\because \text{طاز ق} = \frac{\text{جاز ق}}{\text{جتاز ق}}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\text{طاز ق} = \frac{\text{جتاز}^{2}\text{ق} - \text{جاز}^{2}\text{ق}}{\text{جتاز}^{2}\text{ق}} \cdot \frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}}$$

$$= \frac{1}{\text{جتاز}^{2}\text{ق}}\ \frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}}$$

$$= \text{قاز}^{2}\text{ق}\ \frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}}$$

مثال (2) جد مشتقة قاز ق

الحل :

$$\because \text{ظاز ق} = \frac{\text{جاز ق}}{\text{جتاز ق}}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \text{ظاز ق} = \frac{\text{جتاز}^{٢}\text{ ق} - \text{جاز}^{٢}\text{ ق}}{\text{جتاز}^{٢}\text{ ق}} = \frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}}$$

$$= \frac{١}{\text{جتاز}^{٢}\text{ ق}} \frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}}$$

$$= \text{قاز}^{٢}\text{ ق} \frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}}$$

مثال (٢) :

$$\text{جد } \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \text{ قاز ق}$$

الحل :

$$\because \text{قاز ق} = \frac{١}{\text{جتاز ق}}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \text{قاز ق} = \frac{٠ - \text{جاز ق}}{\text{جتاز}^{٢}\text{ ق}} \frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}}$$

$$= -\text{ظاز ق قاز ق} \frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}}$$

الاختبار البعدي

تمرين-1- : احسب المشتقة الأولى للدالة التالية : $y = 8\ e^{2x+1}$

تمرين-2- : احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = e^{x^2}$ **2)** $y = e^{-x} \ln x$

3) $y = 5^{3x^2}$ **4)** $y = e^{-2x} \sin 3x$

الاسبوع الثالث عشر

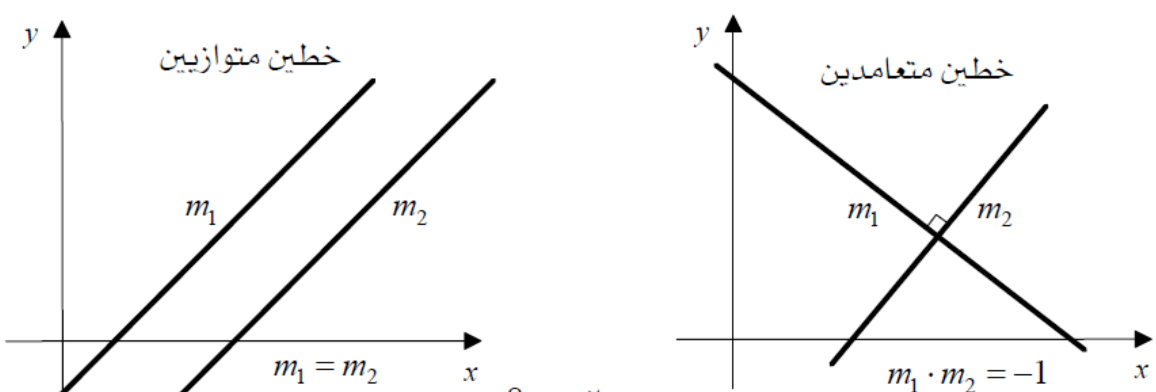
تطبيقات المشتقة,معادلة المماس والعمود,السرعة والتعجيل والتكبير.

معادلات الخطوط المستقيمة

- شكل المعادلة (الميل ونقطة): $y = m(x - x_1) + y_1$
- شكل المعادلة (الميل والجزء المقطوع): $y = mx + b$
- شكل المعادلة (الخط يمر بنقطة الأصل): $y = mx$
- الخط الأفقي(الميل يساوي صفر): $y = b$
- الخط العمودي (الميل غير معرف): $x = a$

٦. الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة

يمكن استخدام ميل الخط المستقيم لمعرفة هل خطين هما متوازيين أو متعامدين كما هم موضح في الرسم 8. وبالتحديد خطين غير عموديين، متوازيين إذا وفقط إذا كان ميلاهما متساويين $(m_1 = m_2)$ ويكونا متعامدان إذا وفقط إذا كان ميل أحد الخطوط يساوي معكوس الثاني مع تغيير الإشارة $(m_1 = -\frac{1}{m_2})$.



الرسم 8

مثال : أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر من خلال النقطة $(2,-1)$ في كل من الحالات التالية:

a) الخط موازي للخط المستقيم $2x - 3y = 5$

b) الخط متعامد على الخط المستقيم $2x - 3y = 5$

الحل:

أولا نجد ميل الخط المستقيم المعطى بترتيب المعادلة على شكل $y = mx + b$ كالتالي:

$$2x - 3y = 5 \Rightarrow -3y = -2x + 5 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

إذا ميل هذا الخط المستقيم هو $\frac{2}{3}$ وبالتالي:

a) ميل الخط المستقيم المطلوب $m = \frac{2}{3}$ لأن الخط المعطى موازي له. إذا الآن لدينا ميل ونقطة فيمكن إيجاد المعادلة الخط المستقيم بالطريقة المذكورة سابقا كالتالي:

$$y = m(x - x_1) + y_1 = \frac{2}{3}(x - 2) + (-1) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} - 1 = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

b) في هذه الحالة الميل المطلوب يساوي معكوس الميل المعطى بتغيير الإشارة لأنه متعامد عليه أي:

$m = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$ وباقي الحل يكون كما في الفقرة a) أي:

$$y = -\frac{3}{2}(x - 2) + (-1) = -\frac{3}{2}x + \frac{6}{2} - 1 = -\frac{3}{2}x + \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}x + 2$$

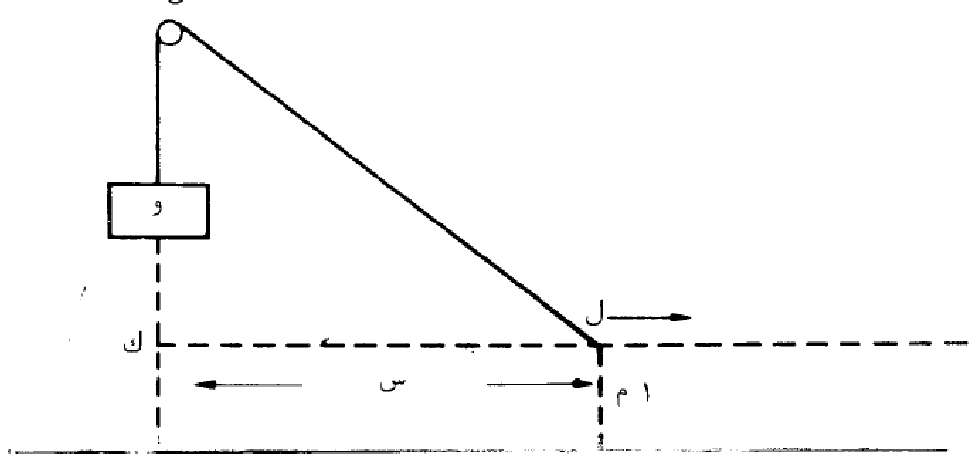
تطبيقات التفاضل

APPLICATIONS OF DIFFERENTIATION

سرعة تغير الدوال

(Related Rates)

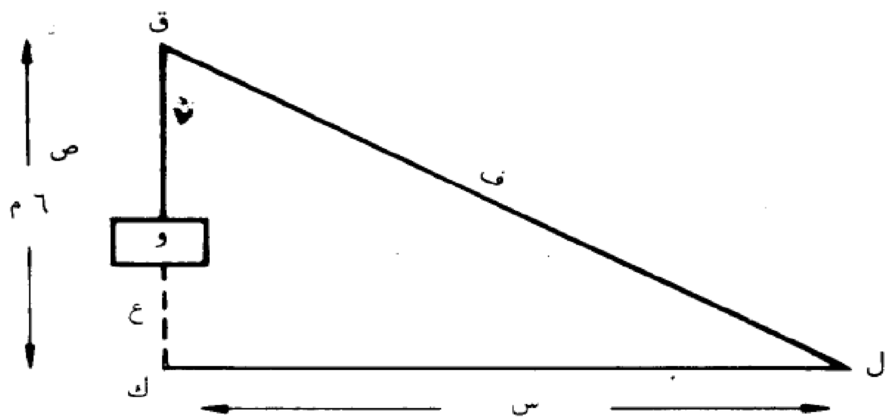
ان بعض الدوال تتغير بالنسبه الى الزمن • فنصور كما في الشكل — ٣٩ — ان حبلا يدور حول بكرة في النقطة ق ويحمل ثقلا وزنه (و) في احدى نهايتيه بينما النهاية الثانية يمسكها شخص على ارتفاع متر واحد من الارض في النقطة ل ويسير على شكل خط مستقيم مواز للارض بسرعة قدرها ٢ م / ثا •



شكل — ٣٩ —

فاذا كانت س في الشكل تمثل المسافة بالامتار بين يد الشخص والخط الشاقولي ق و عندئذ فان س هي دالة متزايدة بالنسبة الى ن حيث ان سرعة الزيادة بالنسبة الى ن حسبما تعلمنا تساوى ٢ م / ثا وهذا يعبر عنه رياضيا بقولنا ان $\frac{د\,س}{د\,ن}$ = + ٢ ومن جهة اخرى اذا كان الشخص يسير باتجاه المستقيم الشاقولي ق و بسرعة قدرها ٢ م / ثا فان $\frac{د\,س}{د\,ن}$ = — ٢ وذلك لان س تصبح دالة متناقصة بالنسبة الى ن •

الان وعلى حسب المثال السابق لنفرض ان البكرة ترتفع عن الارض بـ ٧ امتار وان طول الحبل ١٢ م وفي لحظة ما كانت قيمة س تساوى ٣ م وان الشخص يسير مبتعدا عن البكرة فباى سرعة يكون صعود الوزن في تلك اللحظة ؟



شكل ــ ٤٠ ــ

الحل :

ان يد الرجل في الشكل ــ ٤٠ ــ ترتفع عن الارض مسافة ١ م كما مررنا سابقا.

∴ ق ك = ٦ م

تكون العلاقات بين المتغيرات في الشكل ــ ٤٠ ــ في اى زمن كان حسبما يلي .

ص + ف = ١٢ .... (١)

ع + ص = ٦ .... (٢)

$(٦)^٢ + س^٢ = ف^٢$ .... (٣)

وفي اللحظة التي كان فيها س = ٣ م فأن $\frac{د س}{د ن} = ٢$

ولايجاد قيمة $\frac{د ع}{د ن}$ في تلك اللحظة نتبع ما يلي :

∵ ف = ١٢ ــ ص من معادلة (١)

ص = ٦ ــ ع من معادلة (٢)

∴ ف = ١٢ ــ (٦ ــ ع) = ٦ + ع

$(٦)^٢ + س^٢ = (٦ + ع)^٢$ في المعادلة (٣)

وباشتقاق المعادلة بالنسبة الى ن ينتج :

صفر + ٢ س $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٢ (٦ + ع) $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ .... (٤)

ولايجاد قيمة ع في اللحظة التي فيها س = ٣ م نعوض في المعادلة (٣)

(٦)^{٢} + (٣)^{٢} = ف^{٢}

٣٦ + ٩ = ف^{٢}

∴ ف = ٣ $\sqrt{٥}$

ف = ٢٫٢٣٦ × ٣ = ٦٫٧٠٨ م

∴ ص = ١٢ − ٦٫٧٠٨ = ٥٫٢٩٢ م

∴ ع = ٦ − ٥٫٢٩٢ = ٠٫٧٠٨ م

وبالتعويض عن قيم (س) ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ ، ع في المعادلة ٤ ينتج

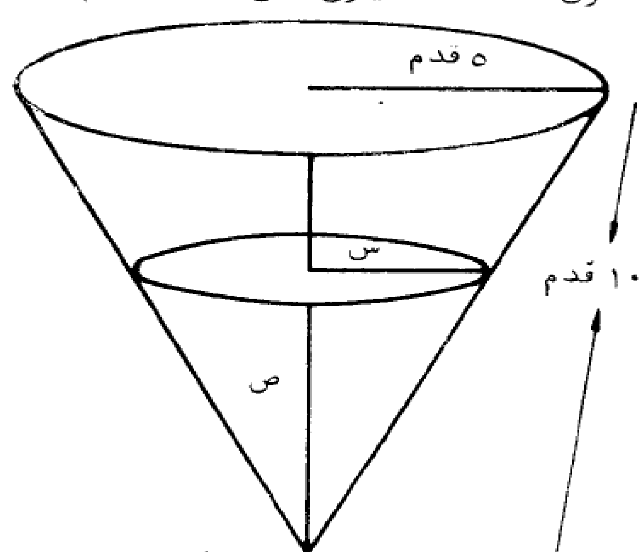
٢ (٣) (٢) = ٢ (٦ + ٠٫٧٠٨) $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

١٢ = ١٣٫٤١٦ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

∴ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = $\frac{١٢٠٠٠}{١٣٤١٦}$ = $\frac{٥٠٠}{٥٥٩}$ م / ثا

مثال (٢) :

حوض ماء على شكل مخروط رأسه نحو الاسفل كما في الشكل ـ ٤١ ـ حيث ان نصف قطر فوهته ٥ قدم وارتفاعه ١٠ قدم ٠ يصب فيه الماء بسرعة ٢ قدم^{٣}/دقيقة ، باى سرعة يكون ارتفاع مستوى الماء عندما يكون عمق الماء ٦ قدم ؟



شكل ـ ٤١ ـ

نفرض س ، ص كما في الشكل حيث ان

ح = الحجم (قدم^{3}) للماء في الحوض في اى زمن كان

س = نصف قطر مقطع المخروط في مستوى الماء

ص = عمق الماء في الحوض في اى زمن كان

حيث ان $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ٢ والمطلوب $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ؟ عندما ص = ٦

من الشكل ــ ٣٤ ــ نلاحظ ان :

$\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{١٠}$ اى ان س = $\frac{١}{٢}$ ص

$$\because \text{ح} = \frac{١}{٣}\,\text{ط}\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{١}{١٢}\,\text{ط}\,\text{ص}^{٣}$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٤}\,\text{ط}\,\text{ص}^{٢}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

$$\therefore ٢ = \frac{١}{\cancel{٤}_{\,١}}\,\text{ط}\,(\cancel{٣٦}^{\,٩})\,\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{٢}{٩\,\text{ط}}\ \text{ق/دقيقة}$$

الاختبار البعدي :

تمارين

تمرين 1 : أوجد معادلة الخط المستقيم التي تمر بالنقطة المعطاة والميل المعطى

$1)(0,3), m=\frac{3}{4} \quad 2)(0,0), m=\frac{2}{3} \quad 3)(-2,4), m=-\frac{3}{5}$

$4)(0,2), m=4 \quad 5)(0,4), m=0 \quad 6)(-1,2), m$ غير معرف

تمرين 2 : أوجد معادلة الخط العمودي التي يتقاطع مع المحور x عند النقطة 3

تمرين 3 : أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة في حالات التالية:

(a) يكون الخط فيها موازي للخط المعطى

(b) يكون الخط فيها متعامد على الخط المعطى

$1)(2,1)\ ,\ 4x-2y=3 \qquad 2)(-3,2)\ ,\ x+y=7 \qquad 3)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right), 5x+3y=0$

$4)(-6,4)\ ,\ 3x+4y-7=0 \qquad 5)(2,5)\ ,\ x=4 \qquad 6)(-1,0)\ ,\ y=-3$

تمرين 4 سلم طوله ١٣ م استندت احدى جهتية على حائط شاقولي والجهة الاخرى على ارض مستوية ملساء فاذا بدأت قاعدته بالانزلاق بعيدا عن الحائط بسرعة قدرها ٠٫٢٥ م / ثا فبأى سرعة تهبط قمة السلم الى الاسفل عندما تكون قاعدة السلم على بعد ٥ م عن الحائط.

تمرين 5 منطاد كروى يملأ بغاز بسرعة ٩٣٢٫٤٨ سم^٣ فاذا فرضنا ان ضغط الغاز يبقى ثابتا فبأى سرعة يزداد نصف القطر في اللحظة التي فيها طوله يساوى ٣٠ سم ؟

تمرين 6 مصباح على ارتفاع ٥ م اسقطت كرة من نفس الارتفاع من نقطة على بعد ٣ م عن المصباح ما هي سرعة ظل الكرة على الارض بعد مضي $\frac{١}{٢}$ ثانية ؟

الاسبوع الرابع عشر

الاسس واللوغاريتمات

THE INDICES AND LOGARITHMS

حسبما تعلمنا بنظرية ذى الحدين ان :

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1 + \text{ن}\left(\frac{1}{\text{ن}}\right) + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{\text{ن}}\right)^{2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)^{3}}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{\text{ن}}\right)^{3} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\text{ن}\times\text{ن}} \times \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{\text{ن}\times\text{ن}\times\text{ن}} \times \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right) + \frac{1}{\lfloor 3}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right) + \cdots$$

نلاحظ من هذا المفكوك انه كلما كبرت قيمة ن كلما ازداد عدد حدوده بينما قيمة الكسر الذى مقامة ن يصغر وهكذا فلو ان ن تصبح كبيرة جدا مقتربة من اللانهاية فأن قيم الكسور $\frac{1}{\text{ن}}$ ، $\frac{2}{\text{ن}}$ ، $\frac{3}{\text{ن}}$ ، .... تقترب من الصفر .

$$\therefore \lim_{\text{ن}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \cdots\cdots\cdots$$

هذا المجموع اطلق عليه الرمز هـ (e) .

$$\therefore \text{هـ} = 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \cdots\cdots\cdots$$

يسمى الرمز (هـ) اساس اللوغاريتمات الطبيعية ويمكن حساب قيمته بصورة مقربة الى اى مرتبة عشرية نريدها .

حيث ان هـ = ٢٫٧١٨٢٨١٨٢٨٤٥٩٠٤٥

يكتفى للحسابات مقربة الى ثلاث مراتب عشرية عادة

اى ان هـ = ٢٫٧١٨

$$\therefore \text{هـ}^{\text{س}} = \lim_{\text{ن}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن س}}$$

الطبيعية ايضا .

مثال : اذا علمت ان $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص = ٢ فما قيمة ص مقربة الى ثلاث مراتب عشرية .

الحل : $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} = ٢$

$$\therefore \text{ص} = \text{هـ}^{٢}$$

$$= ١ + ٢ + \frac{٢^{٢}}{\underline{|٢}} + \frac{٢^{٣}}{\underline{|٣}} + \frac{٢^{٤}}{\underline{|٤}} + \frac{٢^{٥}}{\underline{|٥}} + \frac{٢^{٦}}{\underline{|٦}} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= ٣ + ٢ + \frac{٤}{٣} + \frac{٢}{٣} + \frac{٣٢}{١٢٥} + \frac{٦٤}{٧٥٠} + \cdots\cdots\cdots$$

= ٧ + ٠ر٢٥٦٠٠٠ + ٠ر٠٨٥٣٣٣

= ٧ر٣٤١٣٣٣

= ٧ر٣٤١٣

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} ١ + \text{ن س} \left(\frac{١}{\text{ن}}\right) + \frac{\text{ن س}(\text{ن س} - ١)}{\underline{|٢}} \left(\frac{١}{\text{ن}}\right)^{٢} + \frac{\text{ن س}(\text{ن س} - ١)(\text{ن س} - ١)}{\underline{|٣}} \left(\frac{١}{\text{ن}}\right)^{٣} + \cdots\cdots\cdots$$

بنفس الطريقة السابقة نستنتج ان :

$$\text{هـ}^{\text{س}} = ١ + \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{\underline{|٢}} + \frac{\text{س}^{٣}}{\underline{|٣}} + \frac{\text{س}^{٤}}{\underline{|٤}} \cdots\cdots\cdots$$

وكذلك $\text{هـ}^{\text{جا س}} = ١ + \text{جا س} + \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\underline{|٢}} + \frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{\underline{|٣}} + \cdots\cdots\cdots$

لو فرضنا ان $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}$

$\therefore \text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}$

وان اللوغاريتمات التي اساسها هـ تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ولهذا تسمى هـ الاساس الى اللوغاريتمات الطبيعية وحسب المتسلسلة السابقة المساوية الى $\text{هـ}^{\text{س}}$ يمكننا حساب قيمة ص بعد التعويض عن كل قيمة تعطي للعدد س ويعوض عنها في قيمة المتسلسلة وبذلك نحصل على جدول يوضح لنا العلاقة بين قيم س، ص يسمى جدول اللوغاريتمات الطبيعية . باعتبار اساسها هـ بينما اللوغاريتمات الاعتيادية العامة المستعملة في الحساب اساسها يساوى العدد ١٠ .

ان جميع قوانين اللوغاريتمات التي درسناها سابقا بالطبع تنطبق على اللوغاريتمات

مثال : اذا علمت ان $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص = ٢ فما قيمة ص مقربة الى ثلاث مراتب عشرية .

الحل : $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص = ٢

∴ ص = $\text{هـ}^{٢}$

$$= ١ + ٢ + \frac{٢^{٢}}{\lfloor ٢} + \frac{٢^{٣}}{\lfloor ٣} + \frac{٢^{٤}}{\lfloor ٤} + \frac{٢^{٥}}{\lfloor ٥} + \frac{٢^{٦}}{\lfloor ٦} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= ٣ + ٢ + \frac{٤}{٣} + \frac{٢}{٣} + \frac{٣٢}{١٢٥} + \frac{٦٤}{٧٥٠} + \cdots\cdots\cdots$$

= ٧ + ٠ر٢٥٦٠٠٠ + ٠ر٠٨٥٣٣٣

= ٧ر٣٤١٣٣٣

= ٧ر٣٤١٣

العلاقة بين اللوغاريتمات العامة والطبيعية :

نفرض ان س = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص

∴ ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$

∴ $\text{لو}_{١٠}$ ص = $\text{لو}_{١٠}$ $\text{هـ}^{\text{س}}$

اى ان $\text{لو}_{١٠}$ ص = س $\text{لو}_{١٠}$ هـ

ومن جداولنا يتبين ان $\text{لو}_{١٠}$ ٢ر٧١٨ = ٠ر٤٣٤٣

∴ $\text{لو}_{١٠}$ ص = ٠ر٤٣٤٣ س

اى ان $\text{لو}_{١٠}$ ص = ٠ر٤٣٤٣ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص ....

او $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص = $\dfrac{\text{لو}_{١٠}\ \text{ص}}{٠ر٤٣٤٣}$

اى ان $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص = ٢ر٣٠٢٦ $\text{لو}_{١٠}$ ص ....

ومن التحقيق في المتساويين (١) ، (٢) يمكننا تحويل لوغاريتم اى مقدار من الاسا

الاساس العشري او بالعكس.

الاختبار البعدي

١ ـ اكتب قيمة ما يأتي الى اربعة حدود :

$$هـ^{٢س} ، هـ^{-س} ، \frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{٢} ، \frac{١ - س}{هـ^{س}}$$

٢ ـ ما هي الاعداد التي لوغاريتماتها الطبيعية هي :

(أ) ٢ ، (ب) $\overline{٦}$ ، (ج) ٨ر$\overline{١}$

٣ ـ استعمل الجداول العامة لايجاد قيمة س في المقدار التالي :

$$لو_{هـ} س = \frac{٢ر٥ \times ١ر٠٠٥}{\sqrt{٠ر٢٣}}$$

الاسبوع الخامس عشر

رسم الدوال

النهاية العظمى والنهاية الصغرى للدالة $f(x)$

تعريف

نقول أن الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى نسبية في النقطة x_0 إذا كان هناك مجال مفتوح U مركزه x_0 بحث يكون :

$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in U$$

ونقول أن الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية صغرى نسبية في النقطة t_0 إذا كان هناك مجال مفتوح I مركزه t_0 بحث يكون :

$$f(x) > f(t_0) \qquad \forall x \in I$$

نظرية

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للإشتقاق في النقطة x_0 وتبلغ في هذه النقطة نهاية عظمى نسبية أو نهاية صغرى نسبية فإن $f'(x_0) = 0$

١,٦. النقاط الحرجة

النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ هي النقاط التي تنعدم عندها المشتقة الأولى للدالة $f(x)$.

ومنه فلحساب النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x ، نضعها تساوي الصفر و نحل المعادلة ذات المجهول x ومنه نحسب القيمة المرفقة للدالة لكل قيمة للمتغير x .

مثال ٢٧ : أوجد النقاط الحرجة للدالة $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

الحل:

نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x ، نضعها تساوي الصفر و نحل المعادلة ذات المجهول x

$$y' = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ أو } x = -1$$

نعوض في عبارة الدالة لكل قيمة لـ x

لما $x = 2$ فإن $y = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 2 = -\frac{4}{3}$

لما $x = -1$ فإن $y = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + 2 = \frac{19}{6}$

ومنه فإن النقاط الحرجة هي : $(2, -\frac{4}{3}), (-1, \frac{19}{6})$

اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى:

إذا كانت الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى في النقطة x_0 فإن مشتقة $f(x)$ موجبة عندما تكون $x < x_0$ وقريبة منها قربا كافيا ، أي أن ميل المماس موجب في النقاط القريبة من x_0 والواقعة على يسارها. و مشتقة $f(x)$ سالبة عندما تكون $x > x_0$ وقريبة منها قربا كافيا، أي أن ميل المماس سالب في النقاط القريبة من x_0 والواقعة على يمينها.

أما إذا كان الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية صغرى في النقطة x_0 فإن $f'(x) < 0$ من أجل كل $x < x_0$ وقريبة من x_0 قربا كافيا، و $f'(x) > 0$ من أجل كل $x > x_0$ وقريبة من x_0 قربا كافيا.

مثال : أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدالة $y = \sqrt{16 - x^2}$

الحل :

الدالة $y = \sqrt{16 - x^2}$ معرفة ومستمرة على المجال $[-4,+4]$ وهي تبلغ قيمة عظمى نسبية تساوي 4 في النقطة $x = 0$ لأن:

$f(x) < 4$ من أجل كل $0 < x \leq 4$ و $-4 \leq x < 0$

مثال : أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدالة $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

الحل:

إن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق في كل نقطة من $\Re$ ومشتقتها تعطى بما يلي:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

وأن المشتقة تنعدم في النقاط $x = -1$ و $x = 1$ وإشارته تحدد من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب.

ونلاحظ من الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x$		+		+		-	
$1 + x$		-		+		+	
$1 - x^2$		-		+		-	

أن $f'(x) < 0$ من أجل كل $x < -1$ و $f'(x) > 0$ من أجل كل $-1 < x < 1$ أي أن إشارة المشتقة تتحول من السالبة إلى الموجبة حول النقطة التي يكون فيها $x = -1$ ومنه فالدالة $f(x)$ تبلغ نهاية صغرى محلية وهي $(-1,-\frac{1}{2})$

وأيضا $f'(x)>0$ من أجل كل $-1<x<1$ و $f'(x)<0$ من أجل كل $x>1$ أي أن إشارة المشتقة تتحول من الموجبة إلى السالبة حول النقطة التي يكون فيها $x=1$ ومنه فالدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى محلية وهي $(1,\frac{1}{2})$.

اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى:

إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقطة الحرجة سالبة فإن هذه النقطة هي نهاية عظمي محلية

وإذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقطة الحرجة موجبة فإن هذه النقطة هي نهاية صغرى محلية

مثال : أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدالة $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$

الحل:

المشتقة الأولى والثانية

$$y'=x^2-x-2,$$
$$y''=2x-1$$

من المثال ١ فإن النقاط الحرجة هي $(2,-\frac{4}{3}), (-1,\frac{19}{6})$

بالنسبة للنقطة الحرجة $(2,-\frac{4}{3})$

$$y''\Big|_{x=2}=2(2)-1=3>0$$

ومنه $(2,-\frac{4}{3})$ هي نهاية صغرى محلية

بالنسبة للنقطة الحرجة $(-1,\frac{19}{6})$

$$y''\Big|_{x=-1}=2(-1)-1=-3<0$$

ومنه $(-1,\frac{19}{6})$ هي نهاية عظمى محلية

٩. نقطة الانعطاف

إذا كانت المشتقة الثانية معدومة وتغير إشارتها حول نقطة فإن هذه النقطة هي نقطة انعطاف.

مثال ٣٠: بالنسبة للدالة $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$

$$y''=2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{}$$

ومنه فعندما يكون $x=\frac{1}{2}$ يكون لدينا نقطة انعطاف

لحساب الإحداثية الثانية نعوض بقيمة $x=\frac{1}{2}$ في عبارة الدالة

$$y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)+2=\frac{11}{12}$$

إذاً النقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{12}\right)$ هي نقطة انعطاف.

الاختبار البعدي

أوجد النقاط العظمى والصغرى ونقاط الانعطاف إن وجدت للدوال التالية:

1) $y=x^3$ 2) $y=-x^3$ 3) $y=\sqrt{x}$ 4) $y=1-x^2$

5) $y=x^2+\frac{16}{x^2}$ 6) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ 7) $y=\frac{1}{x-2}+\frac{x}{4}$ 8) $y=3x^5-10x^3+15x$

الاسبوع السادس عشر

التكامل , التكامل غير المحدد, تكامل الدوال الجبرية واللوغاريتمية

التكامل

INTEGRATION

ما درسناه لحد الان هو حساب التفاضل وهو احد الفروع الرئيسية لحساب التفاضل والتكامل. وقبل ان نتطرق الى الفرع الرئيسي الثاني وهو التكامل نود ان نشير الى الفرق بين التعبيرين ، مشتقة الدالة وتفاضل الدالة.

اذا سالنا ما هي مشتقة الدالة ص وسكتنا فان سؤالنا يكون مغلوطا لان المشتقة يجب ان تكون بالنسبة لمتغير ثان هو المتغير المستقل عادة. وعليه فاذا طلب ايجاد مشتقة ص بالنسبة الى س فالجواب هو $\frac{د ص}{د س}$ اى يجب ان يحتوى الناتج على مقام المشتقة بالنسبة له. وكذلك مشتقة س بالنسبة الى س فانها تساوى واحدا والاصل هو $\frac{ء س}{ء س}$ المساوية للواحد.

اما تفاضل ص فهو د ص وكذلك تفاضل س هو د س وتفاضل $ص^{٢}$ يساوي ٢ ص د ص اى أنه عند ايجاد تفاضل اية دالة او متغير فلا يحتاج لايجاده الى متغير ثان كي نجد التفاضل بالنسبة اليه اى ان الناتج لا يحتوى على مقام.

الان لشرح الفرع الرئيسي الثاني لحساب التفاضل والتكامل وهو موضوع التكامل لا بد ان نشير ايضا الى ان هذا الموضوع يدلنا على معنيين مهمين. ان المعنى الاكثر عمقا واساسية هو ما يدل على تحصيل الكل او المجموع ويكون هذا واضحا رياضيا في ايجاد المساحات المحددة بمنحنيات او ايجاد بعض الحجوم او اطوال المنحنيات او مركز اثقال الخ .... ويسمى هذا الفرع من التكامل بالتكامل المحدود وهذا ما سنتطرق اليه بعدئذ اما الفرع الثاني من التكامل فهو عملية معكوسة لعملية التفاضل وبمعنى اخر ايجاد الدالة الاصلية ان اعطيت مشتقتها.

ويمكنا تعريف هذا النوع بصورة اخرى ايضا بانه :

هو ايجاد الحل للمعادلة التفاضلية ، اى ايجاد الدالة التي اشتقت منها هذه المعادلة التفاضلية. ويسمى هذا النوع من التكامل بالتكامل غير المحدد.

مثال (١) : حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = س^{٢}\sqrt{ص} \quad ،\ ص > صفر$$

الحل : نغير الى تفاضلات

$$\therefore\ ص^{-\frac{١}{٢}}\ د\,ص = س^{٢}\ د\,س$$

وحيث ان $د \cdot ٢\,ص^{\frac{١}{٢}} = ص^{-\frac{١}{٢}}\ د\,ص$

وكذلك $د \cdot \frac{١}{٣}\,س^{٣} = س^{٢}\ د\,س$

$$\because\ \int ص^{-\frac{١}{٢}}\ د\,ص = \int س^{٢}\ د\,س$$

$$\therefore\ ٢\,ص^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}\,س^{٣} + ك$$

بالطبع لاحاجة لاضافة ثابت التكامل الى الجهة الاخرى وجعل احد الثابتين $ك_{١}$ والاخر $ك_{٢}$

لان $ك_{٢} - ك_{١}$ = كمية ثابتة ايضا .

مثال (٢) : حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = س^{٢}\sqrt{ص}$$ والمار بالنقطة (٣، ٤)

الحل : من المثال السابق فان حل المعادلة هو

$$٢\,ص^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}\,س^{٣} + ك$$

وحيث ان النقطة (٣ ، ٤) تحقق المعادلة .

$$\therefore\ ٢\,(٤)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}\,(٣)^{٣} + ك$$

$$٤ = ٩ + ك$$

$$\therefore\ ك = -٥$$

$$\therefore\ \text{المعادلة هي :}\ ٢\,ص^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}\,س^{٣} - ٥$$

$$\therefore\ ص = \frac{١}{٤}\left(\frac{س^{٣}}{٣} - ٥\right)^{٢}$$

قوانين التكامل :

حيث ان الرمز ∫ هو معكوس للرمز د ، لذا فان :-

أ ـ $\int$ د ص = ص + ك .... (١)

اى ان تكامل تفاضل دالة ص يساوى ص زائدا ثابت اختيارى ك .

ب ـ يمكن تحريك الثابت عبر اشارة التكامل اى ان :

$\int$ أ . د ص = أ $\int$ د ص .... (٢)

ملاحظة : لا يمكن تحريك المتغيرات عبر اشارة التكامل مطلقا .

جـ ـ ان تكامل مجموع او فرق تفاضلين او اكثر يساوى مجموع او فرق تكاملهما اى ان :

$\int$(د ص ∓ د ع ∓ د س) = $\int$ د ص ∓ $\int$ د ع ∓ $\int$ د س .... (٣)

د ـ اذا كانت ن لا تساوى ناقص واحد ، فانه يمكن الحصول على تكامل $ص^{ن}$ د ص باضافة واحد الى الاس ثم القسمة على الاس الجديد اى ان :

$\int$ $ص^{ن}$ د ص = $\frac{ص^{ن + ١}}{ن + ١}$ + ك ، ن ≠ − ١ .... (٤)

فمثلا $\int$ $س^{\frac{٢}{٣}}$ د س = $\frac{س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}}$ + ك

= $\frac{٣}{٥}$ $س^{\frac{٥}{٣}}$ + ك

ملاحظة : عند استعمال القانون الرابع يجب الانتباه الى د ص بدقة خاصة اذا كانت الدالة ص متعددة الحدود .

مثال : لايجاد تكامل $\sqrt{٢ س + ١}$ د س

ص = ٢ س + ١ ، ∴ د ص = ٢ د س

وعليه لكي نطبق القانون الرابع ويصبح خارج الجذر مساو لمشتقة داخله فيجب ان يكتب على الصورة التالية :

$\int$ $\sqrt{٢ س + ١}$ د س = $\frac{١}{٢}$ $\int$ $(٢ س + ١)^{\frac{١}{٢}}$. ٢ د س

= $\frac{١}{٢}$ $\frac{(٢ س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$ + ك

= $\frac{١}{٣}$ $(٢ س + ١)^{\frac{٣}{٢}}$ + ك

تمارين:

1. احسب التكاملات التالية :

$$\int (\text{س}^{٢} - \text{س})\, \text{د س}$$

$$\int (٣\text{س} - ١)^{٢٤٩}\, \text{د س}$$

$$\int (٢ - ٧\text{ن})^{\frac{٢}{٣}}\, \text{د ن}$$

$$\int \frac{\text{د س}}{(٣\text{س} + ٢)^{٢}}$$

$$\int \frac{٣\text{ع}\ \text{د ع}}{\sqrt{١ - \text{ع}^{٢}}}$$

$$\int \text{ن}^{٢}\, (١ + ٢\text{ن}^{٣})^{-\frac{٢}{٣}}\, \text{د ن}$$

$$\int \frac{(\text{س} + ١)\, \text{د س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٢}}$$

$$\int \left(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right) \text{د س}$$

2 ــ حل المعادلات التفاضلية التالية الخاضعة للشروط المنصوص عليها .

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\,\text{س}\,\text{ص}^{٢} \qquad ، \quad \text{س} = ١ \text{ ، } \text{ص} = ١$$

تكملة قوانين التكامل :

هـ - تعلمنا في موضوع التفاضل ان :

$$\frac{د}{د س} هـ^{ق} = هـ^{ق} \cdot \frac{د ق}{د س}$$

وبتحويل الجهتين الى صيغة التفاضل ينتج :

$$د \cdot هـ^{ق} = هـ^{ق} \cdot د ق$$

$$\therefore \int د \cdot هـ^{ق} = \int هـ^{ق} \cdot د ق$$

ولما كان تكامل تفاضل دالة يساوي تلك الدالة زائدا ثابت التكامل

$\therefore \int هـ^{ق} \cdot د ق = هـ^{ق} + ك$ .... (٥)

مثال (١) : $\int هـ^{جا س} جتا س د س = هـ^{جا س} + ك$

مثال (٢) : جد $\int هـ^{٢ س} \cdot د س$

الحل : $\because د \cdot (٢ س) = ٢ د س$

$$\therefore \int هـ^{٢ س} د س = \frac{١}{٢} \int هـ^{٢ س} \cdot ٢ د س$$

$$= \frac{١}{٢} هـ^{٢ س} + ك$$

و - درسنا في موضوع التفاضل ايضا انه :

$$\frac{د}{د س} لو_{هـ} ص = \frac{\frac{د ص}{د س}}{ص}$$

وبتحويل جهتي المعادلة الى تفاضليها ينتج

$$د \cdot لو_{هـ} ص = \frac{د ص}{ص} \qquad \therefore \int د \cdot لو_{هـ} ص = \int \frac{د ص}{ص}$$

$$\therefore \int \frac{د ص}{ص} = لو_{هـ} ص + ك \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٦)$$

مثال (١): $\int \frac{٤ س \, د س}{٢ س^{٢} + ١} = لو \, (٢ س^{٢} + ١) + ك$

مثال (٢): جد $\int \frac{(س + ١) \, د س}{س^{٢} + ٢ س + ٣}$

الحل:

$$\because د \cdot (س^{٢} + ٢ س + ٣) = (٢ س + ٢) \, د س$$

$$\therefore \int \frac{(س + ١) \, د س}{س^{٢} + ٢ س + ٣} = \frac{١}{٢} \int \frac{٢ (س + ١) \, د س}{س^{٢} + ٢ س + ٣}$$

$$= \frac{١}{٢} لو \, (س^{٢} + ٢ س + ٣) + ك$$

تمارين

احسب قيم التكاملات في التمارين التالية :

$\int \frac{د س}{٢ س + ٣}$ ، $\int \frac{د س}{٢ - ٣ س}$ ، $\int \frac{س^{٢} د س}{٤ س^{٣} + ١}$

$\int \frac{جا س \, د س}{٢ - جتا س}$ ، $\int \frac{٢ س - ٥}{س} د س$ ، $\int \frac{س \, د س}{س + ١}$

$\int (لو س)^{٢} \frac{د س}{س}$ ، $\int \frac{د س}{\sqrt{س} \, (١ + \sqrt{س})}$

$\int هـ^{٢ س} د س$ ، $\int س \, هـ^{س^{٢}} د س$ ، $\int هـ^{\frac{س}{٣}} د س$

$\int \frac{هـ^{س} د س}{١ + ٢ هـ^{س}}$ ، $\int \frac{٤ \, د س}{هـ^{٣ س}}$ ، $\int \frac{د س}{س \, لو س}$

$\int \frac{هـ^{س} - هـ^{-س}}{هـ^{س} + هـ^{-س}} د س$

ملاحظة : لايجاد $\int أ^{س} د س$

الاسبوع السابع عشر

تكامل الدوال المثلثية

To find the table of standard integrals we take Table 6.3 for differentiation, swap the columns, rewrite a couple of the entries in a more convenient form and add on the constant of integration. This gives Table 7.1.

As integration is 'anti-differentiation' we can spot the integral in the standard cases, that is, those listed in Table 7.1.

A table of standard integrals

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
1	$x + C$
$x^n (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sec^2(x)$	$\tan(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}(x) + C$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1}(x) + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1}(x) + C$

Example 1

$$\text{(a)} \int (3x^2 \qquad - 1)\,\mathrm{d}x = x^3 + x^2 - x + C.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 + x^2 - x + \mathrm{C}) = 3x^2 + 2x - 1.$$

$$\text{(b)} \int 3\sin(x) + \cos(x)\mathrm{d}x = -3\cos(x) + \sin(x) + C.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-3\cos(x) + \sin(x) + C) = 3\sin(x) + \cos(x).$$

$$\text{(c)} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sin^{-1}(x) - 2\tan^{-1}(x) + C.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1}(x) - 2\tan^{-1}(x) + C) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2}.$$

If y is a composite function that can be written in terms of the variable u, then

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Substituting the chain rule for $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ into Equation (7.1) gives

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = y + C.$$

If y is a function of u, then we could just differentiate with respect to u and then integrate again and we will get back to the same expression, give or take a constant, that is

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u = y + C.$$

Considering Equations (7.2) and (7.3) together, we have

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u$$

Example 2 Find $\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x$.

Solution Substitute $u = 3x+2$. Then $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/3$. Then the integral becomes

$$\int \sin(u)\frac{\mathrm{d}u}{3} = -\frac{\cos(u)}{3} + C$$

Re-substitute $u = 3x+2$ to give

$$\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(3x+2)}{3} + C.$$

Check:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{\cos(3x+2)}{3} + C\right) &= \frac{\sin(3x+2)}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+2)\\ &= \frac{3\sin(3x+2)}{3} = \sin(3x+2).\end{aligned}$$

Example Find $\int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Solution Substitute $u = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2x$ to give

$$\int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int x\sin(u)\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int \frac{1}{2}\sin(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(u) + C.$$

As $u = x^2$, we have

$$\int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C\right) = \frac{1}{2}\sin(x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)$$

Example Find

$$\int \frac{3x}{(x^2+3)^4}\,\mathrm{d}x.$$

Solution Substitute $u = x^2 + 3$. Then $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2x$. The integral becomes

$$\int \frac{3x}{(u)^4}\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int \frac{3}{2}u^{-4}\,\mathrm{d}u$$

which can be integrated, giving

$$\frac{3}{2}\frac{u^{-4+1}}{(-4+1)} + C = \frac{1}{2}u^{-3} + C.$$

Re-substituting for $u = x^2 + 3$ gives

$$\int \frac{3x}{(x^2+3)^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(x^2+3)^{-3} + C = -\frac{1}{2(x^2+3)^3} + C.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}(x^2+3)^{-3} + C\right) = -\frac{1}{2}(-3)(x^2+3)^{-4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+3).$$

Using the function of a function rule, we get

$$-\frac{1}{2}(-3)(x^2+3)^{-4}(2x) = 3x(x^2+3)^{-4} = \frac{3x}{(x^2+3)^4}.$$

Example Find $\int \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution This can be rewritten as $\int(\cos(x))^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$. Substitute $u = \cos(x)$, then $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -\sin(x)$, so $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$, or $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/\sin(x)$. The integral becomes

$$\int u^2\,\sin(x)\frac{\mathrm{d}u}{-\sin(x)} = \int -u^2\,\mathrm{d}u.$$

Integrating gives

$$-\frac{u^3}{3} + C.$$

Re-substitute for u, giving

$$\int(\cos(x))^2\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C.$$

Check:

$$-\frac{1}{3}\cos^3(x) + C = -\frac{1}{3}(\cos(x))^3 + C.$$

Differentiate

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{3}(\cos(x))^3 + C\right) &= -3\left(\frac{1}{3}\right)(\cos(x))^2(-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x)\sin(x).\end{aligned}$$

This method of integration will only work when the integral is of the form

$$\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

that is, there is a function of a function multiplied by the derivative of the substituted variable, or where the substituted variable is a linear function.

Sometimes you may want to try to perform this method of integration and discover that it fails to work, in this case, another method must be used.

Example Find

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Substitute $u = x^2 + 1$, then $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2x$. The integral becomes

$$\int \frac{x^2}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int \frac{x}{2u^2}\,\mathrm{d}u.$$

This substitution has not worked. We are no nearer being able to perform the integration. There is still a term in x involved in the integral, so we are not able to perform an integration with respect to u only.

In some of these cases, integration by parts may be used.

الاختبار البعدي

1 Find $\int x \sin(x^2)\, \mathrm{d}x$.

2 Find $\int \cos^2(x) \sin(x)\, \mathrm{d}x$.

الاسبوع الثامن عشر

التكامل المحدد,تطبيقات التكامل المحدد,المساحة تحت المنحني, المساحة بين المنحنيين

The definite integral from $x = a$ to $x = b$ is defined as the area under the curve between those two points. In the graph in Figure 7.1, the area under the graph has been approximated by dividing it into rectangles. The height of each is the value of y and if each rectangle is the same width then the area of the rectangle is $y\delta x$.

If the rectangle is very thin, then y will not vary very much over its width and the area can reasonably be approximated as the sum of all of these rectangles.

The symbol for a sum is Σ (read as capital Greek letter sigma). The area under the graph is approximately

$$A = y_1\delta x + y_2\delta x + y_3\delta x + y_4\delta x + \cdots = \sum_{x=a}^{x=b-\delta x} y\delta x.$$

We would assume that if δx is made smaller, the approximation to the exact area would improve. An example is given for the function $y = x$ in Figure 7.2. Between the values of 1 and 2, we divide the area into strips, first of width 0.1, then 0.01, then 0.001.

Example **Find**

$$\int_{-1}^{1} 3x^2 + 2x - 1 \, \mathrm{d}x.$$

Solution

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 3x^2 + 2x - 1 \, \mathrm{d}x &= [x^3 + x^2 - x]_{-1}^{1} \\ &= (1^3 + 1^2 - 1) - ((-1)^3 + (-1)^2 - (-1)) \\ &= 1 - (-1 + 1 + 1) = 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Example Find

$$\int_0^{\pi/6} \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x.$$

Solution

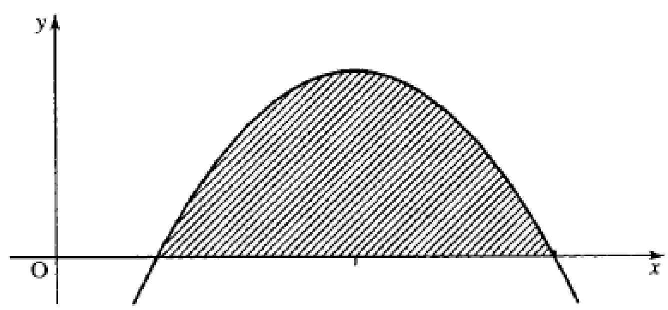
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{3}\cos(3x+2)\right]_0^{\pi/6}\\ &= \frac{1}{3}\cos\left(3\frac{\pi}{6}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}\cos(2)\right)\\ &= \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\right)+\frac{1}{3}\cos(2)\approx 0.1644.\end{aligned}$$

Example Find the shaded area in Figure 7.6, where $y=-x^2+6x-5$.

Solution First, we find where the curve crosses the x-axis, that is, when $y=0$

$$0=-x^2+6x-5 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-6x+5=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (x-5)(x-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=5 \vee x=1$$



The shaded area is bound by the graph of $y=-x^2+6x-5$ and the x-axis.

This has given the limits of the integration. Now we integrate:

$$\begin{aligned}\int_1^5 -x^2 + 6x - 5\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_1^5 \\ &= -\frac{(5)^3}{3} + \frac{6(5)^2}{2} - 5(5) \\ &\quad - \left(-\frac{(1)^3}{3} + \frac{6(1)^2}{2} - 5(1)\right) \\ &= -\frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = \frac{32}{3} = 10\tfrac{2}{3}\end{aligned}$$

Therefore, the shaded area is $10\frac{2}{3}$ units^2.

Finding the area when the integral is negative

The integral can be negative if the curve is below the x-axis as in Figure 7.7, where the area under the curve $y = \sin(x)$ from $x = \pi$ to $x = 3\pi/2$ is illustrated.

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_{\pi}^{3\pi/2} = -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(\pi) = -1$$

The integral is negative because the values of y are negative in that region. In the case where all of that portion of the curve is below the x-axis to find the area we just take the modulus. Therefore, the shaded area $A = 1$.

This is important because negative and positive areas can cancel out giving an integral of 0. In Figure 7.8, the area under the curve $y = \sin(x)$ from $x = 0$ to $x = 2\pi$ is pictured. The area under the curve has a positive part from 0 to π and an equal negative part from π to 2π.

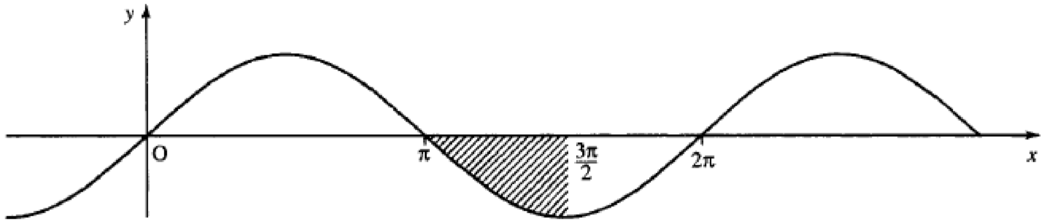
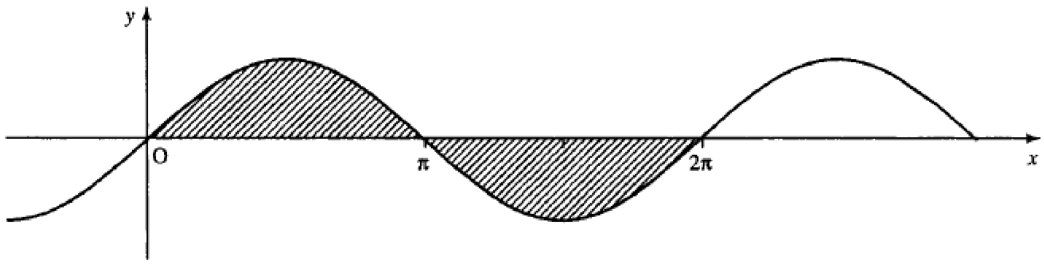


Figure 7.7 *The area under the curve given by* $\int_{\pi}^{3\pi/2} \sin(x)\,dx$.



The following gives an integral of 0

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0))$$
$$= -1 - (-1) = 0$$

To prevent cancellation of the positive and negative parts of the integration, we find the total shaded area in two stages

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2$$

and

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(\pi)) = -2$$

So, the total area is $2 + |-2| = 4$.

We have seen that if we wish to find the area bounded by a curve which crosses the x-axis, then we must find where it crosses the x-axis first and perform the integration in stages.

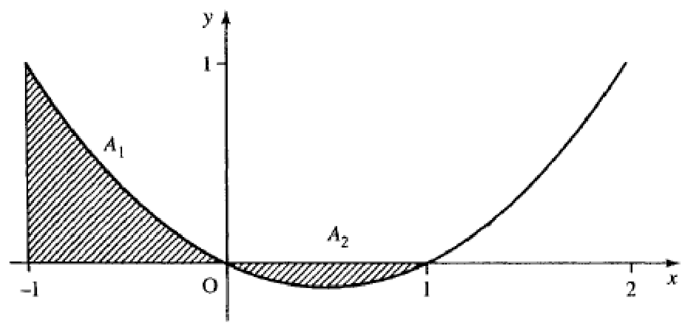
Example Find the area bounded by the curve $y = x^2 - x$ and the x-axis and the lines $x = -1$ and $x = 1$.

Solution First, we find if the curve crosses the x-axis. $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ or $x = 1$. The sketch of the graph with the required area shaded is given in Figure 7.9.

Therefore, the area is the sum of A_1 and A_2. We find A_1 by integrating from -1 to 0

$$\int_{-1}^{0} (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

therefore, $A_1 = \frac{5}{6}$.



Sketch of $y = x(x-1)$, with the area bounded by the x-axis and $x = -1$ and $x = 1$ marked. The area above the x-axis is marked as A_1 and the area below the x-axis is marked as A_2.

Find A_2 by integrating from 0 to 1 and taking the modulus

$$\int_{0}^{1} (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Therefore, $A_2 = \frac{1}{6}$.

Then, the total area is $A_1 + A_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

الاختبار البعدي

1- Find the area bounded by the x-axis and the portion of the curve $y = 2(x-1)(x-4)$ which lies below it.

2- Find the total area bounded by the curve $y = 2x - x^2$, the x-axis and the lines $x = -1$ and $x = 1$.

الاسبوع التاسع عشر

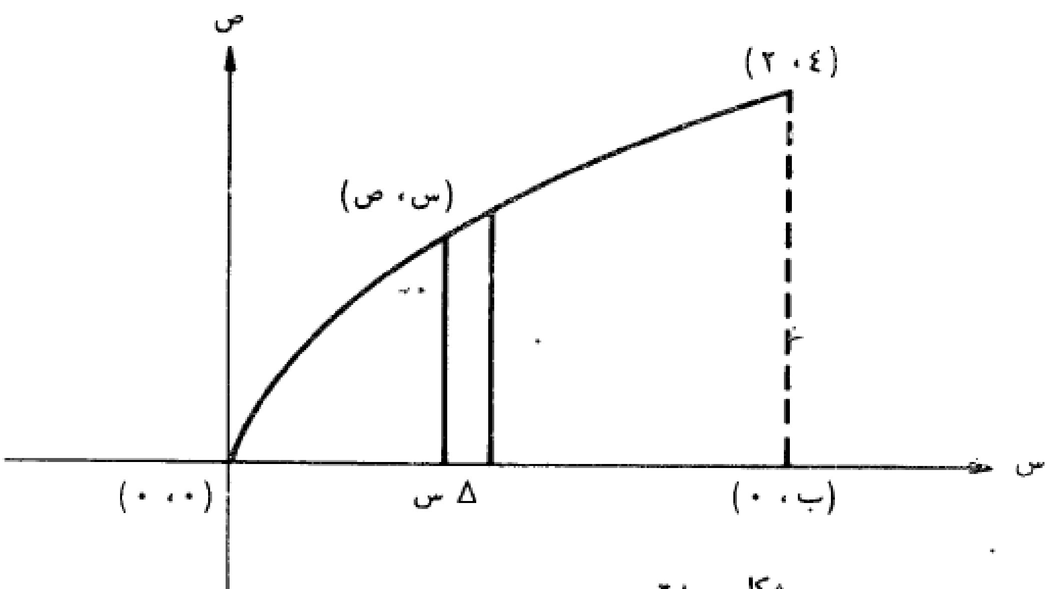
الحجوم الدورانية,طول قوس منحني

حجوم المجسمات الدورانية :

تسمى المجسمات الناتجة عن دوران منطقة مستوية حول محور في مستويها المجسمات الدورانية ـ ويمكن تطبيق المعادلة (١) في ايجاد الحجم الناتج من الدوران بملاحظة مساحة المقطع العرضي للجسم الناتج وتسمى هذه الطريقة بطريقة القرص (DISC METHOD).

مثال (١) : نفرض ان منحني الشكل ـ ٦٨ ـ يمثل الدالة

ص = $\sqrt{س}$ من (٠ ، ٠) الى (٤ ، ٢) . والمطلوب ايجاد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة المستوية حول المحور س.



شكل ـ ٦٨ ـ

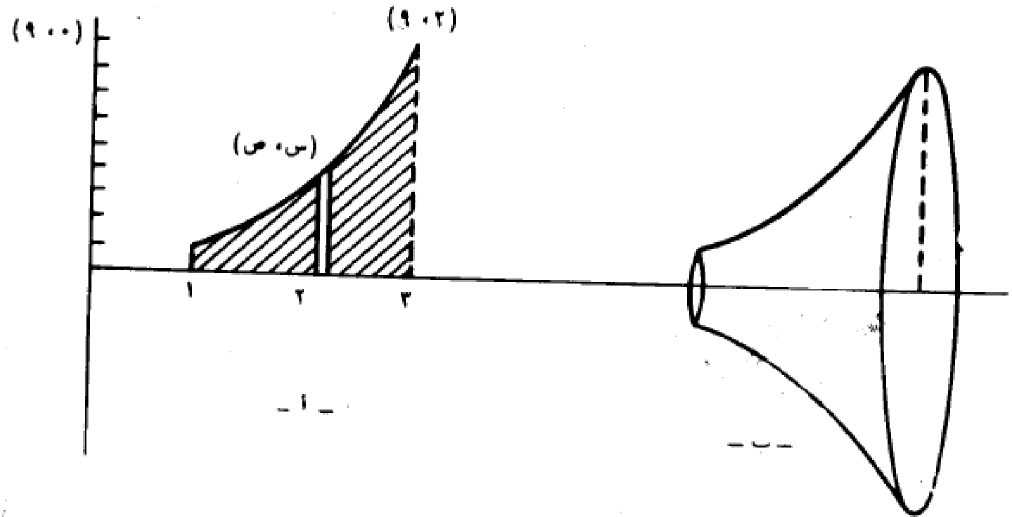
ان حجم الشريحة النموذجية مساويا الى :

$$\Delta ح = ط ص^{٢} \Delta س = ط (\sqrt{س})^{٢} \Delta س$$

$$ح = \underset{\Delta س \to صفر}{غايـــة} \sum_{٠}^{٤} ط س \Delta س = \int_{٠}^{٤} ط س \; د س$$

$$= ط . \left[\frac{س^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{٤} = ٨ ط$$

مثال (٢) : جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المستوية تحت المنحني $ص = س^2$ من $س = ١$ الى $س = ٣$ حول محور السينات



شكل – ٦٩ –

ان المنحني $ص = س^2$ مبين في الشكل – ٦٩ – (أ) . كما ان تخطيط للجسم الدوراني مبين في الشكل – ٦٩ – (ب) .

ولو استعملنا مباشرة المعادلة (١) للحصول على الحجم الدوراني ينتج :

مبين في الشكل – ٦٩ – (ب) .

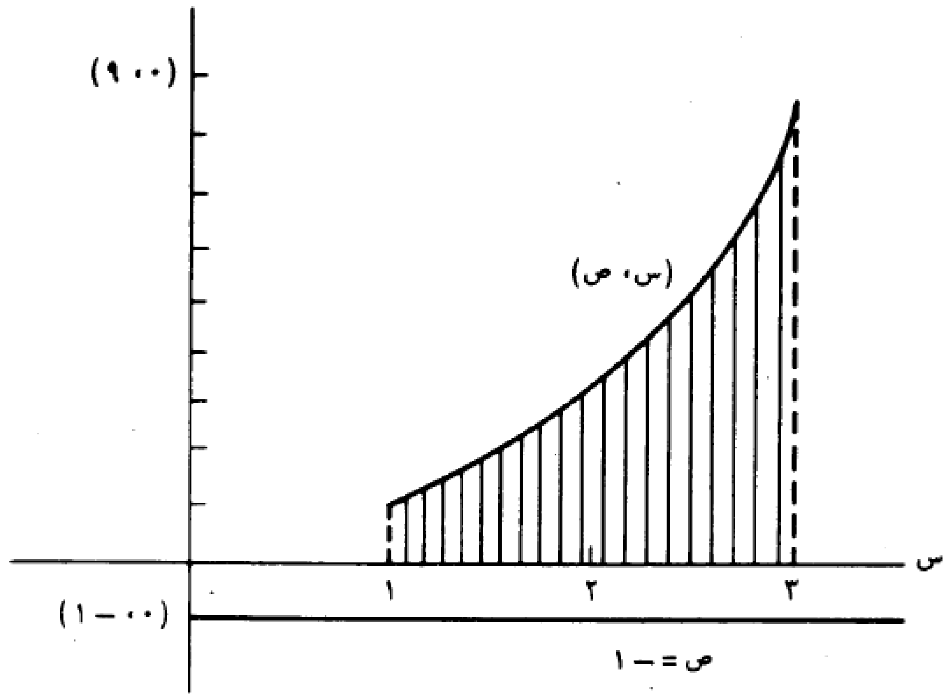
ولو استعملنا مباشرة المعادلة (١) للحصول على الحجم الدوراني ينتج :

$$ح = ط \int_{١}^{٣} س^{٤} \, د\, س \qquad \text{باعتبار } ح = ط \int_{أ}^{ب} ص^{٢} \, د\, س$$

$$= ط \left[\frac{س^{٥}}{٥} \right]_{١}^{٣}$$

$$ح = ط \left(\frac{٢٤٣}{٥} - \frac{١}{٥} \right) = \frac{٢٤٢\, ط}{٥}$$

مثال (٣) : جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المستوية في (مثال ٢) حول مستقيم موار الى محور السينات ويبعد عنه بوحدة واحدة نحو الاسفل.



شكل ــ ٧٠ ــ

في الشكل ــ ٧٠ ــ اعدنا رسم المنحني ص = س^{2} مع رسم المستقيم ص = ــ ١، باعتباره محور الدوران.

حيث ان الحجم الدوراني الناتج في هذه الحالة يحوى على تجويف في داخله فاننا نتمكن من حل المسالة اولا باعتبار الحجم خال من التجويف ثم نطرح حجم التجويف منه.

من الشكل ــ ٦٩ ــ نلاحظ ان نصف قطر المقطع العرضي للجسم في اية منه يساوى (ص + ١).

وعليه فان مساحة المقطع العرضي تساوى ط (ص + ١)^{2}

∴ ح = ط $\int_{1}^{3}$ (ص + ١)^{2} د س

ح = ط $\int_{1}^{3}$ (س^{2} + ١)^{3} د س

= ط $\int_{1}^{3}$ (س^{4} + ٢س^{2} + ١) د س

$$= \text{ط} \left(\frac{\text{س}^{٥}}{٥} + \frac{٢\,\text{س}^{٢}}{٣} + \text{س} \right) \Big]_{١}^{٣}$$

$$= \frac{١٠١٦}{١٥} \text{ط وحدة مكعبة}$$

ولو لاحظنـا التجويف في المجسم فانه يمثل اسطوانة نصف قطر قاعدتها وحدة واحدة

∴ حجم التجويف = ط × ١^{٢} × ٢ = ٢ ط وحدة مكعبة

وعليه فان حجم المجسم الدوراني = $\frac{١٠١٦}{١٥}$ ط – ٢ ط = $\frac{٩٨٦}{١٥}$ ط وحدة مكعبة

طول قوس منحني

$$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \sqrt{١ + \left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢}}\ \text{د س} \quad \dots\dots\dots \quad (٢\text{أ})$$

$$\text{ل} = \int_{\text{جـ}}^{\text{ء}} \sqrt{١ + \left(\frac{\text{د س}}{\text{د ص}}\right)^{٢}}\ \text{د ص} \quad \dots\dots\dots \quad (٢\text{ب})$$

$$\text{ل}_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \sqrt{\left(\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\right)^{٢} + \left(\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}\right)^{٢}}\ \text{د ن} \quad \dots\dots\dots \quad (٣)$$

مثال (١) : جد طول القوس للمنحني ص = $\frac{٢}{٣}$ (س – ١)$^{\frac{٣}{٢}}$

من س = ١ الى س = ٤

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٢}{٣} \left(\frac{٣}{٢}\right) (\text{س} - ١)^{\frac{١}{٢}} = (\text{س} - ١)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\therefore \text{ل} = \int_{١}^{٤} \sqrt{١ + \left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢}}\ \text{د س}$$

$$= \int_{١}^{٤} \sqrt{١ + \text{س} - ١}\ \text{د س}$$

$$= \int_{١}^{٤} \text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{د س} = \frac{٢}{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} \Big]_{١}^{٤}$$

$$= \frac{٢}{٣} (٨ - ١) = \frac{١٤}{٣}$$

مثال (٢) : جد طول القوس الذى تتحركه النقطة (س، ص) على محيط دائرة نصف قطرها نق ، اذا علمت ان س = نق جتا هـ ، ص = نق جا هـ من هـ = صفر الى هـ = ٢ ط

الحل :

$$ل = \int^{٢ط} \sqrt{\left(\frac{د س}{د هـ}\right)^٢ + \left(\frac{د ص}{د هـ}\right)^٢}\ د هـ$$

$$\frac{د س}{د هـ} = -نق جا هـ \ ، \ \frac{د ص}{د هـ} = نق جتا هـ$$

$$\therefore \left(\frac{د س}{د هـ}\right)^٢ + \left(\frac{د ص}{د هـ}\right)^٢ = نق^٢ \ (جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ) = نق^٢$$

$$\therefore ل = \int^{٢ط} نق \ د هـ = نق (هـ) \Big]_{.}^{٢ط} = ٢ ط نق$$

مثال (٣) : اوجد طول المنحني ص = س$^{\frac{٢}{٣}}$ بين س = - ١ ، س = ٨

الحل : نجد من معادلة المنحني ان $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}}$

وحيث ان قيمة المقدار تصبح لانهائية عند نقطة الاصل فاننا نستعمل المعادلة (٢ ب)

بدلا من (٢ أ) لايجاد طول المنحني حيث سنضطر الى ايجاد $\frac{د س}{د ص}$.

$\because$ معادلة المنحني هي ص = س$^{\frac{٢}{٣}}$

$\therefore$ س = ± ص$^{\frac{٣}{٢}}$

وبهذه الصورة نحصل على $\frac{د س}{د ص} = ± \frac{٣}{٢} ص^{\frac{١}{٢}}$

$$\therefore د ل = \sqrt{١ + \frac{٩}{٤} ص}\ \ د ص$$

ويكون طول المنحني بين (- ١ ، ١) ونقطة الاصل.

$$ل_١ = \int_{.}^{١} \sqrt{١ + \frac{٩}{٤} ص}\ \ د ص$$

بينما يكون طول المنحني بين نقطة الاصل والنقطة (٨ ، ٤)

$$ل_٢ = \int_{.}^{٤} \sqrt{١ + \frac{٩}{٤} ص}\ \ د ص$$

ويكون طول المنحني ل = ل$_١$ + ل$_٢$

من الضروري ان نحسب الطولين $ل_1$ ، $ل_2$ في عمليتين منفصلتين ، لانه يجب فصل $س = \pm ص^{\frac{3}{2}}$ الى دالتين مختلفتين الى ص ، فيكون لدينا $س = -ص^{\frac{3}{2}}$ من اجل صفر $\leqslant ص \leqslant 1$ بينما يكون لدينا $س = ص^{\frac{3}{2}}$ من اجل صفر $\leqslant ص \leqslant 4$.

وحيث ان

$$ل_1 = \frac{4}{9}\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{9}{4}ص + 1}\cdot\frac{9}{4}\,د\,ص$$

$$ل_1 = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{4}ص + 1\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{1}$$

$$ل_2 = \frac{4}{9}\int_{0}^{4}\sqrt{\frac{9}{4}ص + 1}\cdot\frac{9}{4}\,د\,ص$$

$$ل_2 = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{4}ص + 1\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{4}$$

$$\therefore ل = \frac{8}{27}\left\{\left(\frac{9}{4}ص + 1\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{1} + \left(\frac{9}{4}ص + 1\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{4}\right\}$$

$$ل = \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13} + 80\sqrt{10} - 16\right) = 10{,}ع$$

الاختبار البعدي

١ ــ جد طول المنحني $ص = \frac{1}{3}(س^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ من س = صفر الى س = ٣

٢ ــ جد طول المنحني $ص = س^{\frac{3}{2}}$ من (٠ ، ٠) الى (٤ ، ٨)

٣ ــ جد طول المنحني $9س^2 = 4ص^3$ من (٠ ، ٠) الى $(2\sqrt{3} ، 3)$

٤ ــ جد طول المنحني $س = \frac{ص^4}{4} + \frac{1}{8ص^2}$ من ص = ١ الى ص = ٢

٥ ـ جد حجم المجسم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $ص = س^2$ والمستقيم ص = ٤ حول ما يلي :

أ ــ محور الصادات .

ب ــ محور السينات .

جـ ــ المستقيم ص = ٢

د ــ المستقيم ص = ٤

هـ ــ المستقيم ص = ــ ١

الاسبوع العشرون

تطبيقات فيزياوية و هندسية

١. مركز الثقل ومركز الكتلة

١,١. تعريف

مركز ثقل الجسم هو تلك النقطة الواحدة التي يمكننا اعتبار أن شد الجاذبية والوزن يؤثر عندها عند دراسة سلوك الجسم.

ويعرف مركز الثقل بأنه المركز المتوسط للحجم عندما تكون المادة التي يتضمنها الجسم متجانسة

لنفرض أن الصفيحة قد قسمت إلى n من العناصر

وزنها W_i حيث $i = 1,2,3,\ldots,n$ وإحداثياتها x_i, y_i .

القوة المحصلة لهذه المجموعة من القوى هي وزن

الصحيفة و يعطى كما يلي:

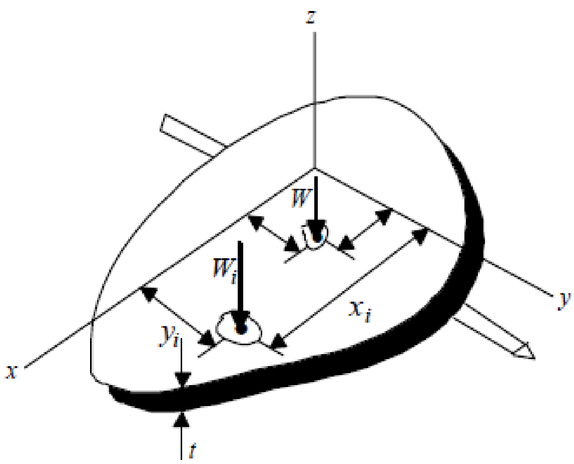
$$W = \sum_i W_i$$

يعين موقع خط عمل القوة المحصلة وزن الصحيفة

بالإحداثيات x_c, y_c حيث

$$x_c = \frac{\sum_i x_i W_i}{\sum_i W_i} = \frac{x_1 W_1 + x_2 W_2 + x_3 W_3 + \ldots + x_3 W_3}{W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_n}$$

$$y_c = \frac{\sum_i y_i W_i}{\sum_i W_i} = \frac{y_1 W_1 + y_2 W_2 + y_3 W_3 + \ldots + y_3 W_3}{W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_n}$$



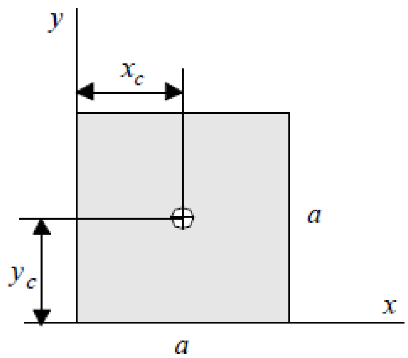
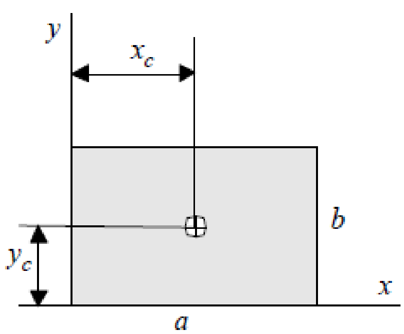
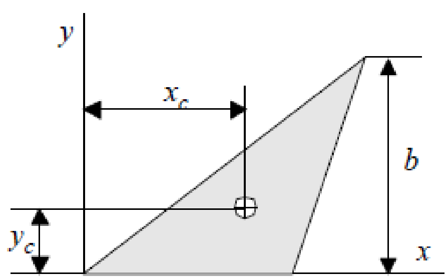
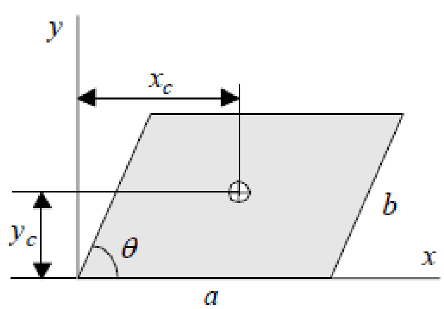
لنرمز لمساحة السطح المستوية للصحيفة بالرمز A وللعناصر A_i ، سمك الصحيفة هو t و γ الوزن

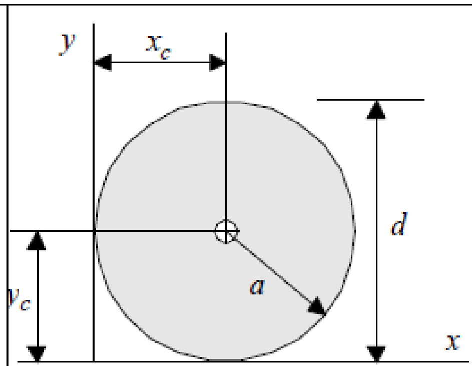
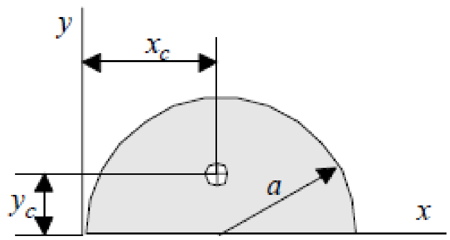
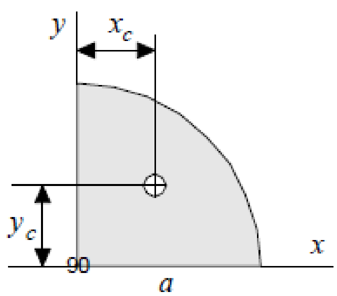
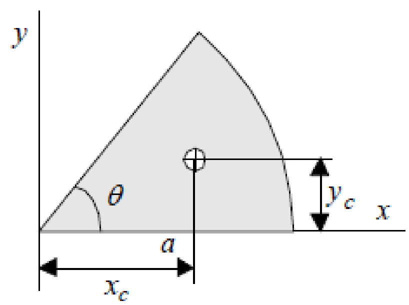
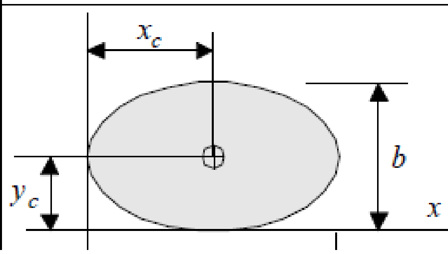
النوعي لمادة الصحيفة ومنه يمكن كتابة المعادلات السابقة كما يلي:

$$x_c = \frac{\sum_i x_i (A_i t\gamma)}{\sum_i (A_i t\gamma)} = \frac{t\gamma \sum_i x_i (A_i t\gamma)}{t\gamma A} = \frac{\sum_i x_i (A_i t\gamma)}{A} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + \ldots + x_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}$$

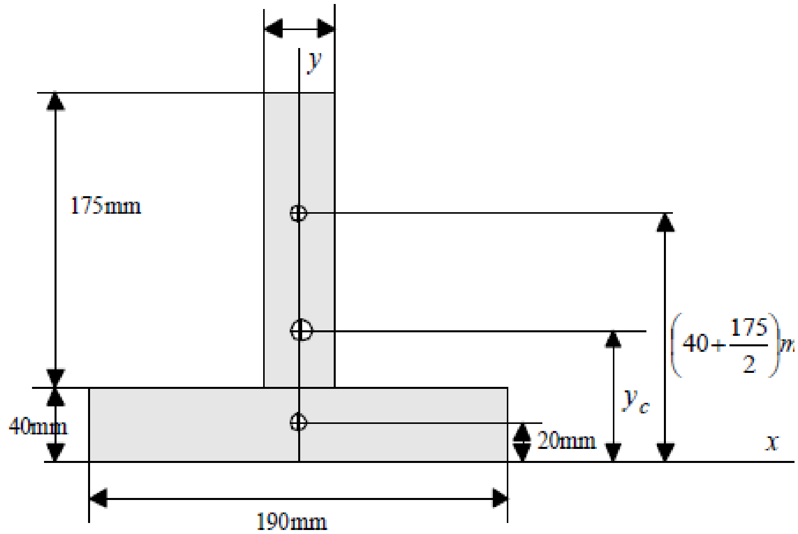
$$Y_G = \frac{\sum_i y_i (A_i t\gamma)}{\sum_i (A_i t\gamma)} = \frac{t\gamma \sum_i y_i (A_i t\gamma)}{t\gamma A} = \frac{\sum_i y_i (A_i t\gamma)}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + \ldots + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}$$

تعرف النقطة على المساحة المستوية A بالإحداثيات x_c, y_c بأنها المركز المتوسط لهذه المساحة والجدول التالي يبين إحداثيات مركز الثقل لبعض الأجسام المستوية الأولية.

الحالة		الشكل	A	x_c	y_c
١	مربع		a^2	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$
٢	مستطيل		ab	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$
٣	مثلث		$\frac{ab}{2}$	-	$\frac{b}{3}$
٤	متوازي الأضلاع		$ab\sin\theta$	$\frac{a+b\cos\theta}{2}$	$\frac{b\sin\theta}{2}$

	دائرة		πa^2	$a = \dfrac{d}{2}$	$a = \dfrac{d}{2}$
	نصف دائرة		$\dfrac{\pi a^2}{2}$	a	$\dfrac{4a}{3\pi}$
٧	ربع دائرة		$\dfrac{\pi a^2}{4}$	$\dfrac{4a}{3\pi}$	$\dfrac{4a}{3\pi}$
٨	قطاع دائري		$\dfrac{a^2\theta}{2}$	$\dfrac{2a\sin\theta}{3\theta}$	$\dfrac{4a\sin^2 \theta/2}{3\theta}$
٩	قطع ناقص		$\dfrac{\pi ab}{4}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{b}{2}$

مثال ١: تمثل المساحة المبينة في الشكل المقطع المستعرض لعائق. أوجد إحداثيات المركز المتوسط لهذه المساحة.



الحل:

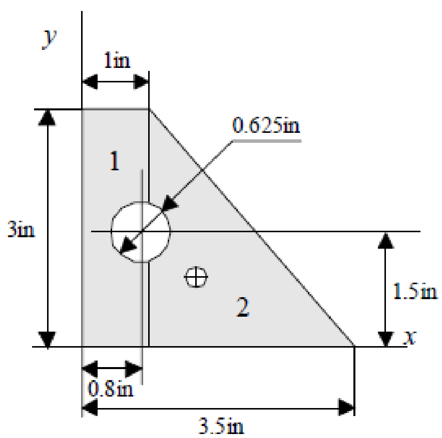
تقسم المساحة المعطاة جزئيا إلى المستطيلين المبينين في الشكل

من اعتبارات التماثل $x_c = 0$

باستخدام المعادلة السابقة نوجد إحداثية المركز المتوسط y_c

$$y_c = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(40+175/2)(40)(175)+20(190)40}{40(175)+190(40)} = 71.5\ mm$$

البيان الاصطلاحي للحل هو إذاً $x_c = 0, \quad y_c = 71.5\ mm$



مثال ٢: أبعاد جزء من آلة على شكل صفيحة رقيقة مبينة في الشكل

١) أوجد إحداثيات المركز المتوسط لهذا الجزء

٢) أوجد إحداثيات المركز المتوسط إذا ثقبت فتحة في هذا الجزء كما هو مبين بالدائرة المتقطعة في الشكل.

الحل:

١) نقسم مساحة الصفيحة إلى المساحتين المبينتين في الشكل

باستخدام المعادلتين السابقتين نوجد إحداثيات المركز المتوسط

$$x_c = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0.5(1)(3) + [1 + 0.333(2.5)](0.5)(2.5)(3)}{1(3) + 0.5(2.5)(3)} = 1.24\ in$$

$$y_c = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{1.5(1)(3) + 1(0.5)(2.5)(3)}{1(3) + 0.5(2.5)(3)} = 1.22\ in$$

٢) في حالة وجود الثقب في الصفيحة نستخدم المعادلتين السابقتين مرة ثانية مع إضافة الحدود التي تعكس العزم الأول ومساحة الثقب وتكون إحداثيات المركز المتوسط في هذه الحالة كما يلي:

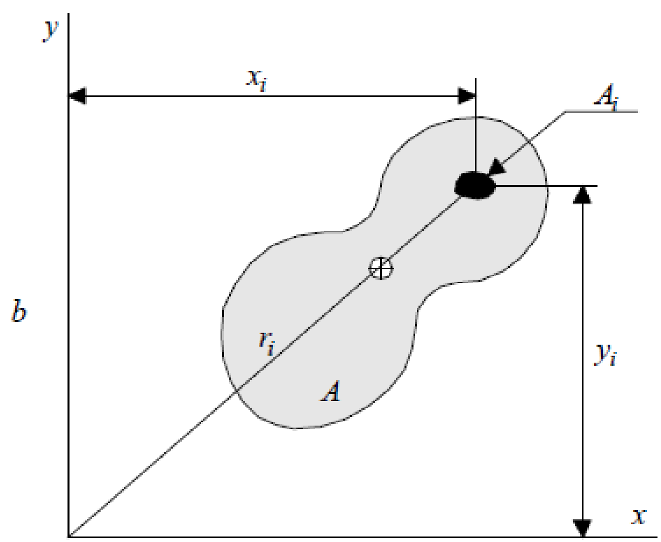
$$x_c = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{0.5(1)(3) + [1 + 0.333(2.5)](0.5)(2.5)(3) - 0.8[\pi(0.625)^2/4]}{1(3) + 0.5(2.5)(3) - \pi(0.625)^2/4} = 1.26 in$$

$$y_c = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{1.5(1)(3) + 1(0.5)(2.5)(3) - 1.5[\pi(0.625)^2/4]}{1(3) + 0.5(2.5)(3) - \pi(0.625)^2/4} = 1.21 in$$

ملاحظة: إذا كانت المساحة المركبة شكلا يحتاج إلى وصف عدة مساحات أولية فإنه يمكن تنظيه الحسابات في صورة جدول

٥. عزم القصور للمساحات المستوية

يبين الشكل التالي مساحة مستوية A موضوعة بالنسبة إلى مجموعة محوري الإحداثيات xy، تقسم المساحة جزئيا إلى مساحات أولية A_i لها إحداثيات x_i و y_i. خاصية المجموعة المركبة التي تتكون من المساحة وموضع هذه المساحة بالنسبة إلى محوري الإحداثيات تسمى عزم القصور



. يعرف عزم القصور للمساحة A كما يلي:

$$I_x = \sum_i y_i^2 A_i, \qquad I_y = \sum_i x_i^2 A_i$$

حيث I_x هو عزم القصور للمساحة A حول المحور x و I_y هو عزم القصور للمساحة A حول المحور y

ملاحظات

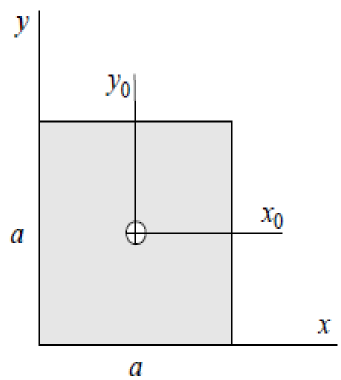
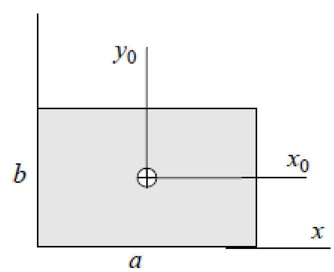
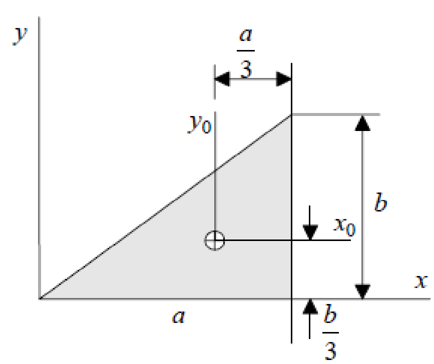
١) نظرا لأن A ، x_i^2 و y_i^2 هي حدود موجبة فإن عزم القصور يكون دوما موجب.

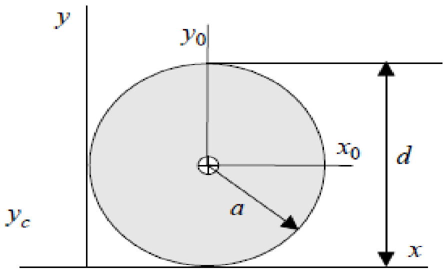
٢) يتضح من المعادلتين السابقتين أن وحدات عزم القصور للمساحة هي طول مرفوع للقوة الرابعة و نعبر عنها بـ $mm^4, cm^4, m^4, \ldots$

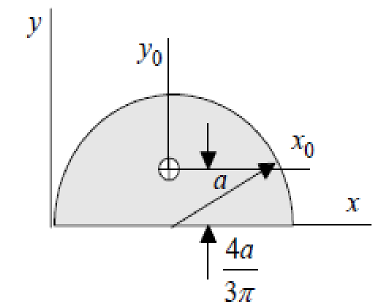
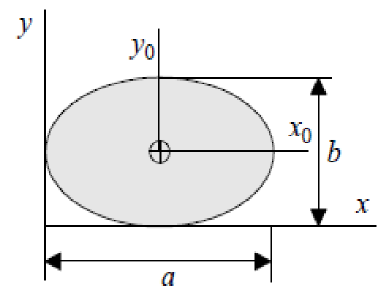
٣) بما أن كل عنصر مساحة مضروب في مربع بعده عن محور الاستناد فإن العناصر التي تكون على مسافات أكثر بعدا من هذا المحور يكون لها تأثير أكبر نسبيا على مقدار عزم القصور عن عناصر المساحة التي تكون أقرب إلى هذا المحور.

٤) عزم القصور هو مقياس لتوزيع عناصر المساحة داخل مساحة مستوية.

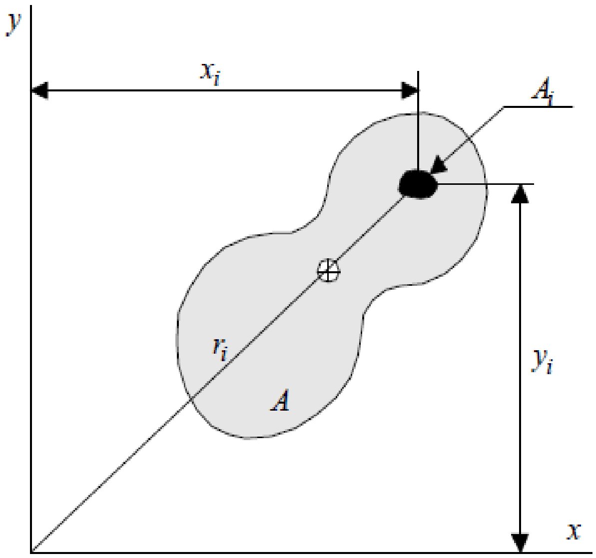
وسنتطرق فيما يلي لحساب عزم القصور لبعض المساحات أولية متعددة

الحالة	الشكل	I_{x_0}	I_{y_0}	I_x	I_y
١		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{3}$	$\frac{a^3}{3}$
٢		$\frac{ab^3}{12}$	$\frac{ba^3}{12}$	$\frac{ab^3}{3}$	$\frac{ab^3}{3}$
٣		$\frac{ab^3}{36}$	$\frac{ba^3}{36}$	$\frac{ab^3}{12}$	$\frac{ba^3}{4}$

4		$\frac{\pi a^2}{4}$	$\frac{\pi a^4}{4}$	$\frac{5\pi a^4}{4}$	$\frac{5\pi a^4}{4}$

5		$a^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$	$\frac{\pi a^4}{8}$	$\frac{\pi a^4}{8}$	$\frac{5\pi a^4}{8}$
6		$\frac{\pi ab^3}{64}$	$\frac{\pi ba^3}{64}$	$\frac{5\pi ab^3}{64}$	$\frac{5\pi ba^3}{64}$

٧. عزم القصور القطبي للمساحات المستوية



بجمع معادلتي عزم القصور حول المحورين المارين بالمركز المتوسط يكون لدينا:

$$I_x + I_y = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) A_i$$

من الشكل نرى أن $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ ومنه

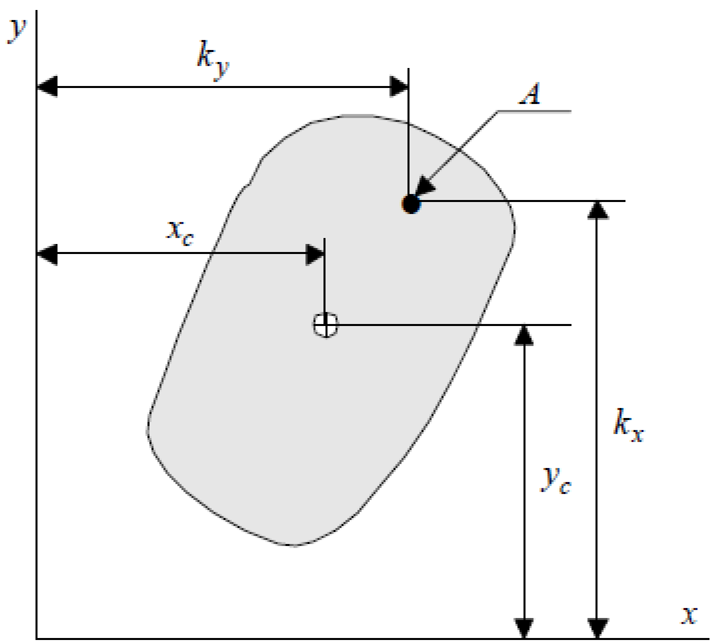
$$J = \sum_i r_i^2 A_i = I_x + I_y$$

محور الاستناد للمقدار J هو محور عمودي على المستوى xy ويؤثر خلال نقطة الأصل لهذه الإحداثيات.

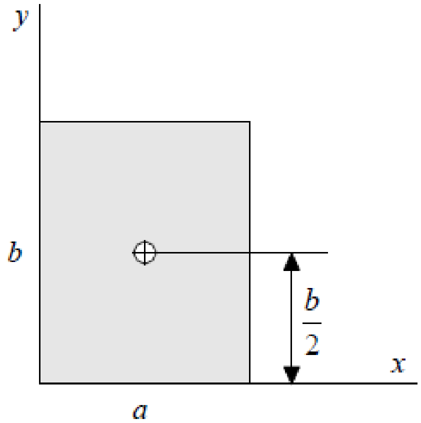
٨. عزم القصور القطبي للمنحنيات المستوية

يعطى عزم القصور القطبي للمنحنى المستوي كما يلي:

$$J = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) l_i = \sum_i r_i^2 l_i = I_x + I_y$$



مثال ٨: أوجد عزم قصور المساحة المستطيلة في الشكل المقابل بالنسبة إلى المحور x



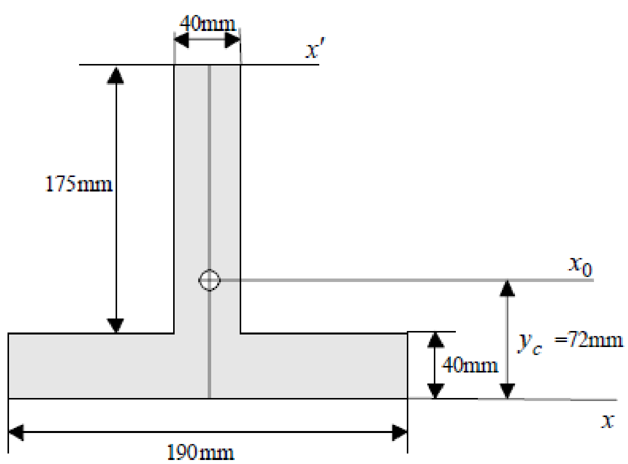
الحل:

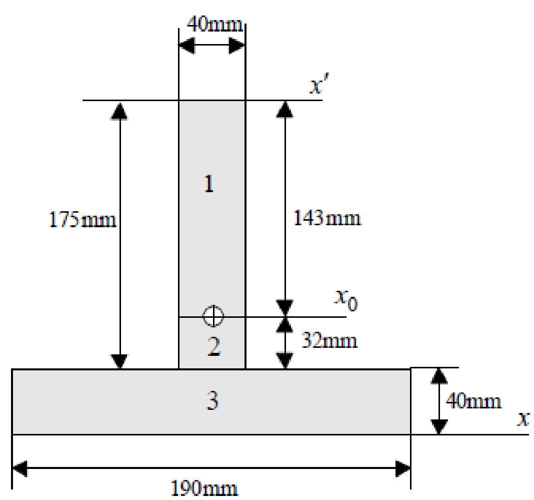
باستخدام المعادلة السابقة في نظرية النقل يكون لدينا :

$$I_x = I_{x_o} + Ad_y^{\,2} = \frac{ab^3}{12} + ab\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{ab^3}{3}$$

نلاحظ أن عزم القصور حول الحافة أكبر أربع مرات من عزم القصور حول المحور الذي يمر بالمركز المتوسط.

مثال ٩: أوجد عزم قصور للمساحة المبينة في الشكل التالي ، حول المحور x_0 الذي يمر بالمركز المتوسط وحول المحورين x و x' اللذين يقعان على طول الحافتين الخارجتين للمساحة.





الحل:

نقسم المساحة الأصلية جزئيا إلى المستطيلات المبينة في الشكل

لدينا عزم القصور للمساحة ١ حول المحور x_0 هي عزم المستطيل حول حرفه

$$I_{x_0,1}=\frac{ab^3}{3}=\frac{40(143)^3}{3}$$

و عزم القصور للمساحة ٢ حول المحور x_0 هي عزم المستطيل حول حرفه

$$I_{x_0,2}=\frac{ab^3}{3}=\frac{40(32)^3}{3}$$

و نستخدم نظرية المحور الموازي لحساب عزم القصور للمساحة ٣ حول المحور x_0

$$I_{x_0,3}=I_{x_c,3}+Ad_y{}^2=\frac{190(40)^3}{12}+190(40)(32+20)^2$$

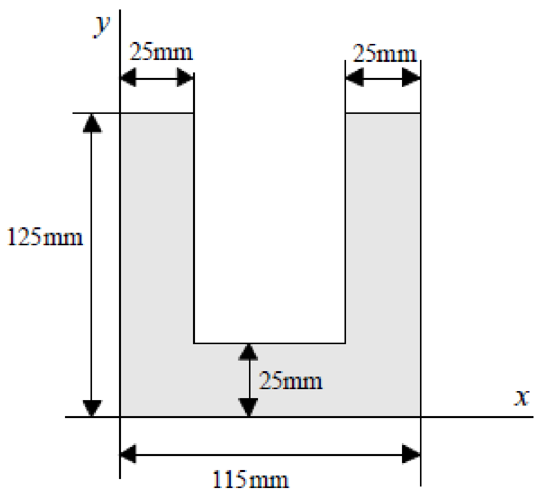
ومنه فإن عزم القصور I_{x_0} لمساحة المقطع تعطى بما يلي:

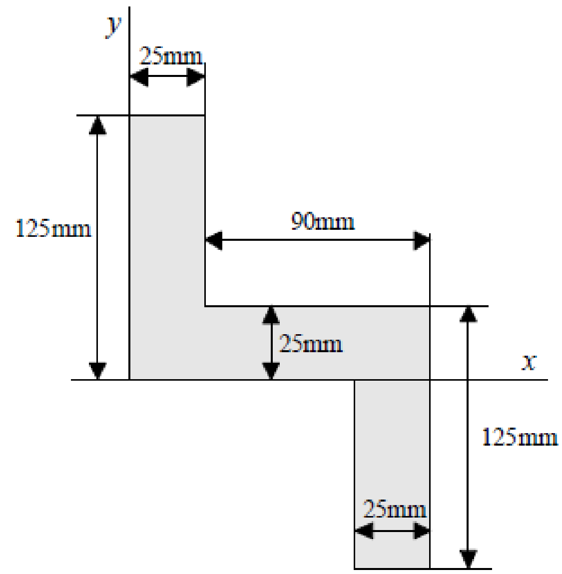
$$I_{x_0}=I_{x_0,1}+I_{x_0,2}+I_{x_0,3}=\frac{40(143)^3}{3}+\frac{40(32)^3}{3}+\left(\frac{190(40)^3}{12}+190(40)(32+20)^2\right)=6.10\times10^7\ mm^4$$

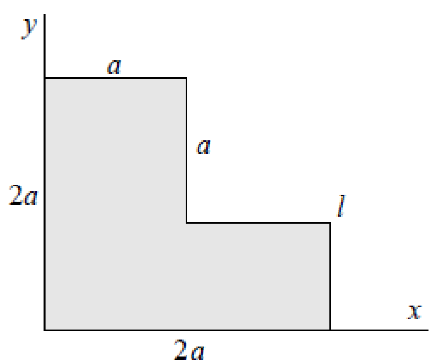
الاختبار البعدي

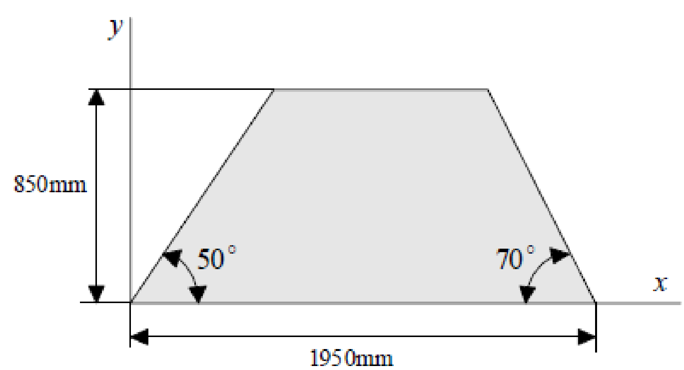
١ - أوجد إحداثيات المركز المتوسط x_c, y_c للمساحة المبينة في الأشكال الآتية

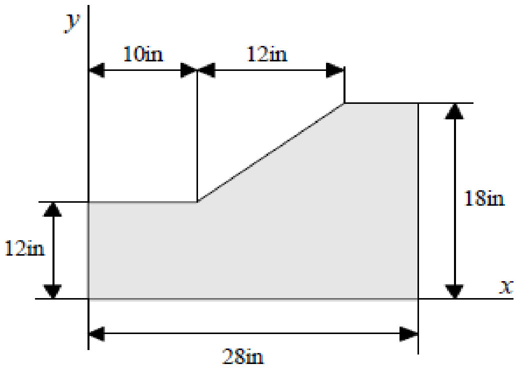
٢ - أوجد عزوم القصور لهذه المساحات بالنسبة للمحاور المارة بالمراكز المتوسطة وبالنسبة للمحور x والمحور y

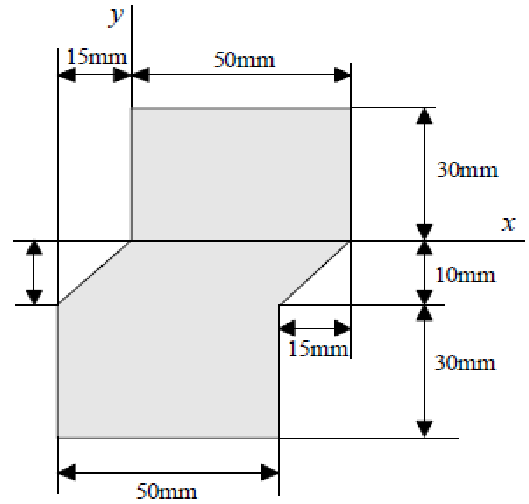


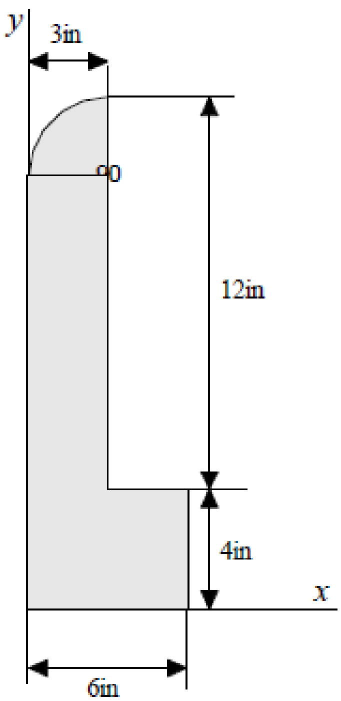


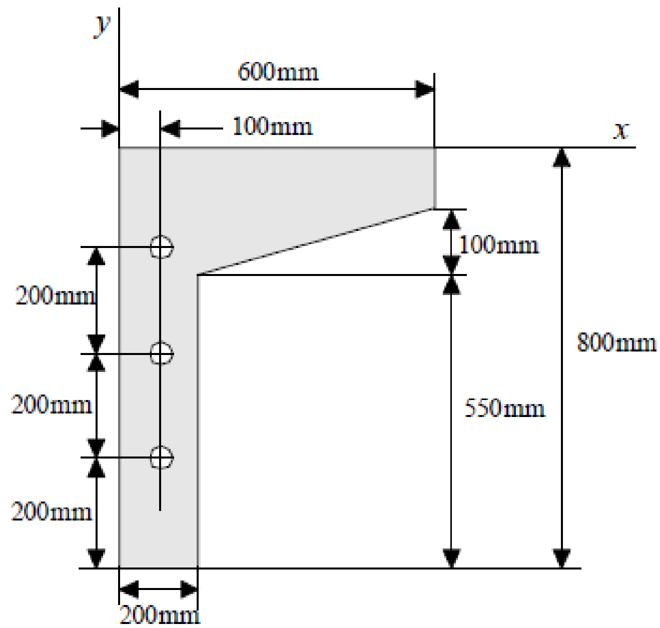


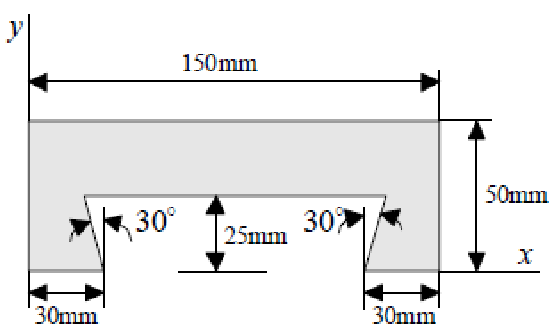



y
10in
12in
18in
12in
x
28in


y
15mm
50mm
30mm
x
10mm
15mm
30mm
50mm


y
3in
90
12in
4in
x
6in


y
600mm
100mm
x
100mm
200mm
200mm
200mm
800mm
550mm
200mm


y
150mm
50mm
30°
25mm
30°
x
30mm
30mm

الاسبوع الحادي والعشرون والثاني والعشرون

طرق عامة في التكامل وتشمل التعويض والتجزئة

طريقة التعويض

we looked at differentiating composite functions. If $y = f(x)$ where we can make a substitution in order to express y in terms of u, that is, $y = g(u)$, where $u = h(x)$, then

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

We can use this to integrate in very special cases by making a substitution for a new variable. The idea is to rewrite the integral so that we end up with one of the functions in Table 7.1. To see when this might work as a method of integration, we begin by looking at differentiating a composite function. Consider the derivative of

$$y = (3x + 2)^3.$$

We differentiate this using the chain rule, giving

$$\frac{dy}{dx} = 3(3x + 2)^2 \frac{d}{dx}(3x + 2) = 3(3x + 2)^2 3.$$

As integration is backwards differentiation, therefore

$$\int 3(3x + 2)^2 3 \, dx = (3x + 3)^3 + C.$$

Supposing then we had started with the problem to find the following integral

$$\int 3(3x + 2)^2 3 \, dx.$$

If we could spot that the expression to be integrated comes about from differentiating using the chain rule then we would be able to perform the integration. We can substitute $u = 3x + 2$ to give $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 3$, and the integral becomes:

$$\int 3u^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}u$$

we then use the 'trick' of replacing $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$ by $\mathrm{d}u$ giving

$$\int 3u^2\,\mathrm{d}u.$$

As the expression to be integrated only involves the variable u, we can perform the integration and we get

$$\int 3u^2\,\mathrm{d}u = u^3 + C.$$

Substituting again for $u = 3x + 2$, we get the integral as

$$\int 3(3x + 2)^2 3\,\mathrm{d}x = (3x + 2)^3 + \mathrm{C}.$$

> We used the trick of replacing $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$ by $\mathrm{d}u$, this can be justified in the following argument. By the definition of the integral as inverse differentiation, if y is differentiated with respect to x and then integrated with respect to x we will get back to y, give or take a constant. This is expressed by
>
> $$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = y + C. \tag{7.1}$$

If y is a composite function that can be written in terms of the variable u, then

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Substituting the chain rule for dy/dx into Equation (7.1) gives

$$\int \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\,dx = y + C. \tag{7.2}$$

If y is a function of u, then we could just differentiate with respect to u and then integrate again and we will get back to the same expression, give or take a constant, that is

$$\int \frac{dy}{du}\,du = y + C. \tag{7.3}$$

Considering Equations (7.2) and (7.3) together, we have

$$\int \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{dy}{du}\,du$$

so that we can represent this result symbolically by $(du/dx)\,dx = du$.

In practice, we make a substitution for u and change the variable of integration by finding du/dx and substituting $dx = du/(du/dx)$.

Example 7.4 Find the integral $\int -(4-2x)^3\,dx$.

Make the substitution $u = 4-2x$. Then $du/dx = -2$, so $du = -2\,dx$ and $dx = -du/2$. The integral becomes

$$\int -u^3\left(\frac{-du}{2}\right) = \int \frac{u^3}{2}\,du = \frac{u^4}{8} + C$$

Re-substitute for $u = 4 - 2x$, giving

$$\int -(4-2x)^3\,dx = \frac{1}{8}(4-2x)^4 + C.$$

Check: Differentiate the result.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{(4-2x)^4}{8} + C\right) &= \frac{1}{8}4(4-2x)^4\frac{d}{dx}(4-2x)\\ &= \frac{1}{8}4(4-2x)^3(-2) = -(4-2x)^3\end{aligned}$$

As this is the original expression that we integrated, this has shown that our result was correct.

When using this method, to find a good thing to substitute, look for something in a bracket, or an 'implied' bracket. Such substitutions will not always lead to an expression which it is possible to integrate. However, if the integral is of the form $\int f(u)\,\mathrm{d}x$, where u is a linear function of x, or if the integral is of the form

$$\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

then a substitution will work providing $f(u)$ is a function with a known integral (i.e. a function listed in Table 7.1).

Integrations of the form $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$

For the integral $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$, make the substitution $u = ax + b$.

Example 7.5 Find $\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x$.

Solution Substitute $u = 3x + 2$. Then $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/3$. Then the integral becomes

$$\int \sin(u)\frac{\mathrm{d}u}{3} = -\frac{\cos(u)}{3} + C$$

Re-substitute $u = 3x + 2$ to give

$$\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(3x+2)}{3} + C.$$

Check:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{\cos(3x+2)}{3} + C\right) &= \frac{\sin(3x+2)}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+2)\\ &= \frac{3\sin(3x+2)}{3} = \sin(3x+2).\end{aligned}$$

Example Integrate

$$\frac{1}{\sqrt{1-(3-x)^2}}$$

with respect to x.

Solution Notice that this is very similar to the expression which integrates to $\sin^{-1}(x)$ or $\cos^{-1}(x)$. We substitute for the expression in the bracket $u = 3 - x$ giving $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -1 \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$. The integral

becomes

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(u)^2}}(-\mathrm{d}u) = \int \frac{(-\mathrm{d}u)}{\sqrt{1-(u)^2}}$$

From Table 7.1, this integrates to give

$$\cos^{-1}(u) + C$$

Re-substituting $u = 3 - x$ gives

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(3-x)^2}}\,\mathrm{d}x = \cos^{-1}(3-x) + C.$$

Check:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos^{-1}(3-x) + C) &= -\frac{1}{\sqrt{1-(3-x)^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3-x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(3-x)^2}}.\end{aligned}$$

Example Find $\int x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Solution Substitute $u = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x =$ $\mathrm{d}u/2x$ to give

$$\int x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int x \sin(u)\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int \frac{1}{2}\sin(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(u) + C.$$

As $u = x^2$, we have

$$\int x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C\right) = \frac{1}{2}\sin(x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)$$
$$= \frac{1}{2}\sin(x^2)(2x) = x\sin(x^2).$$

Example Find

$$\int \frac{3x}{(x^2+3)^4}\,\mathrm{d}x.$$

Solution Substitute $u = x^2 + 3$. Then $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow$ $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2x$. The integral becomes

$$\int \frac{3x}{(u)^4}\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int \frac{3}{2}u^{-4}\,\mathrm{d}u$$

which can be integrated, giving

$$\frac{3}{2}\frac{u^{-4+1}}{(-4+1)} + C = \frac{1}{2}u^{-3} + C.$$

Re-substituting for $u = x^2 + 3$ gives

$$\int \frac{3x}{(x^2+3)^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(x^2+3)^{-3} + C = -\frac{1}{2(x^2+3)^3} + C.$$

which can be integrated, giving

$$\frac{3}{2}\frac{u^{-4+1}}{(-4+1)}+C=\frac{1}{2}u^{-3}+C.$$

Re-substituting for $u=x^2+3$ gives

$$\int\frac{3x}{(x^2+3)^4}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(x^2+3)^{-3}+C=-\frac{1}{2(x^2+3)^3}+C.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}(x^2+3)^{-3}+C\right)=-\frac{1}{2}(-3)(x^2+3)^{-4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+3).$$

Using the function of a function rule, we get

$$-\frac{1}{2}(-3)(x^2+3)^{-4}(2x)=3x(x^2+3)^{-4}=\frac{3x}{(x^2+3)^4}.$$

Example Find $\int\cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution This can be rewritten as $\int(\cos(x))^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$. Substitute $u=\cos(x)$, then $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=-\sin(x)$, so $\mathrm{d}u=-\sin(x)\,\mathrm{d}x$, or $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/\sin(x)$. The integral becomes

$$\int u^2\,\sin(x)\frac{\mathrm{d}u}{-\sin(x)}=\int -u^2\,\mathrm{d}u.$$

Integrating gives

$$-\frac{u^3}{3}+C.$$

Re-substitute for u, giving

$$\int(\cos(x))^2\sin(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos^3(x)}{3}+C.$$

Check:

$$-\frac{1}{3}\cos^3(x) + C = -\frac{1}{3}(\cos(x))^3 + C.$$

Differentiate

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{3}(\cos(x))^3 + C\right) &= -3\left(\frac{1}{3}\right)(\cos(x))^2(-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x)\sin(x).\end{aligned}$$

This method of integration will only work when the integral is of the form

$$\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

that is, there is a function of a function multiplied by the derivative of the substituted variable, or where the substituted variable is a linear function.

Sometimes you may want to try to perform this method of integration and discover that it fails to work, in this case, another method must be used.

Example Find

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Substitute $u = x^2 + 1$, then $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2x$. The integral becomes

$$\int \frac{x^2}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int \frac{x}{2u^2}\,\mathrm{d}u.$$

This substitution has not worked. We are no nearer being able to perform the integration. There is still a term in x involved in the integral, so we are not able to perform an integration with respect to u only.

In some of these cases, integration by parts may be used.

التكامل بالتجزئة

Integration by parts

This can be useful for integrating some products, for example, $\int x \sin(x)\,\mathrm{d}x$. The formula is derived from the formula for differentiation of a product.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

(subtracting $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,v$ from both sides)

$$\Leftrightarrow u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v$$

$$\Rightarrow \int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = uv - \int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \quad \text{(integrating both sides)}$$

As we found before $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$ can be replaced by $\mathrm{d}u$ so $(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$ can be replaced by $\mathrm{d}v$, and this gives a compact way of remembering the formula:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

To use the formula, we need to make a wise choice as to which term is u (which we then need to differentiate to find $\mathrm{d}u$) and which term is $\mathrm{d}v$ (which we then need to integrate to find v). Note that the second term $\int v\,\mathrm{d}u$ must be easy to integrate.

Example Find $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$

Solution Use $u = x$; $\mathrm{d}v = \sin(x)\,\mathrm{d}x$. Then

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \text{ and } v = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos(x).$$

Substitute in $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ to give

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos(x) - \int -\cos(x)1\,\mathrm{d}x$$

$$= -x\cos(x) + \sin(x) + C.$$

Check:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x\cos(x)+\sin(x)+C) &= -\cos(x)+x\sin(x)+\cos(x)\\ &= x\sin(x).\end{aligned}$$

We can now solve the problem that we tried to solve using a substitution, but had failed.

Example Find

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Solution
We can spot that if we write this as

$$\int x\frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

then the second term in the product can be integrated. We set $u = x$ and

$$\mathrm{d}v = \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = x(x^2+1)^{-2}\,\mathrm{d}x.$$

Then $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ and $v = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1}$. (To find v we have performed the integration $\int x(x^2+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1}$. Check this result by substituting for x^2+1). Substitute in $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ to give

$$\int x\frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}(x^2+1)^{-1} - \int \frac{-(x^2+1)^{-1}}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)}.$$

Note that the remaining integral is a standard integral given in Table 7.1 as $\tan^{-1}(x)$, so the integral becomes

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + C.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + C\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x}{2}(x^2+1)^{-1} + \tan^{-1}(x) + C\right)$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1} + \frac{x}{2}(2x)(x^2+1)^{-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)}$$
$$= \frac{x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Example Find $\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution As $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$,

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

The integral becomes

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot 2\cos(2x)$$
$$= \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$$
$$= \sin^2(x) \quad \text{(from the double angle formula).}$$

الاختبار البعدي

Exercises

Find the following integrals

(a) $\int (x^3 + x^2)\,dx$ (b) $\int 2\sin(x) + \sec^2(x)\,dx$

(c) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ (d) $\int (1 + x^2 + 3x^3)\,dx$

(e) $\int (1 - 5x)\,dx$ (f) $\int \cos(2 - 4x)\,dx$

(g) $\int \sqrt{2x - 1}\,dx$ (h) $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$

(i) $\int x(x^2 - 4)^3\,dx$ (j) $\int x\sqrt{(1 + x^2)}\,dx$

(k) $\int \frac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}\,dx$ (l) $\int (x^2 + x - 6)(2x + 1)\,dx$

(m) $\int \frac{4x^2}{(x^2 - 7)^2}\,dx$ (n) $\int_1^2 x\cos(x)\,dx$

(o) $\int x^2\cos(x)\,dx$ (p) $\int_2^4 x\sqrt{x - 1}\,dx$

(q) $\int x(2x - 3)^4\,dx$ (r) $\int_0^{\pi/2} \sin^5(x)\,dx$

(s) $\int \cos^4(x)\,dx$ (t) $\int \sin(3x)\cos(5x)dx.$

الاسبوع الثالث والعشرون

استخدام الكسور الجزئية والاسية واللوغاريتمية

The exponential function $y = e^t$

Figures 8.2(a) and 8.3(a) give graphs of $y = 2^t$ and $y = 3^t$, which are two exponential functions. We can sketch their derivative functions by drawing tangents to the graph and measuring the gradient of the tangent at various different points. The derivative functions are pictured in Figure 8.2(b), dy/dt where $y = 2^t$, and in Figure 8.3(b), dy/dt where $y = 3^t$.

We can see that for these exponential functions the derivative has the same shape as the original function but has been scaled in the y-direction, that is, multiplied by a constant, k, so that $dy/dt = ky$ as we expected:

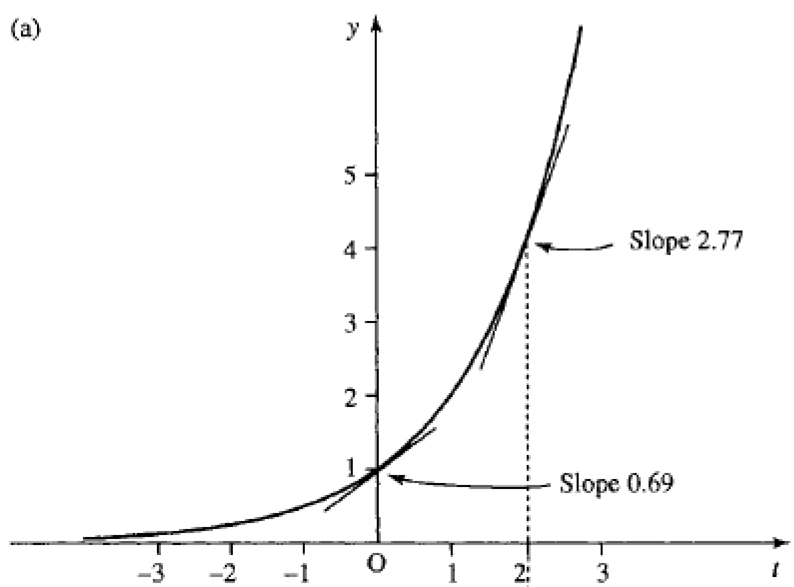
$$\frac{d}{dt}(2^t) = (C)(2^t) \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt}(3^t) = (D)(3^t)$$

where C and D are constants. We can see from the graphs that $C < 1$ and $D > 1$. Thus, the derivative of 2^t gives a squashed version of the original graph and the derivative of 3^t gives a stretched version of the original graph.

It would seem reasonable that there would be a number somewhere between 2 and 3 that we can call e, which has the property that the derivative of e^t is exactly the same as the original graph. That is,

$$\frac{d}{dt}(e^t) = e^t.$$

The exponential function



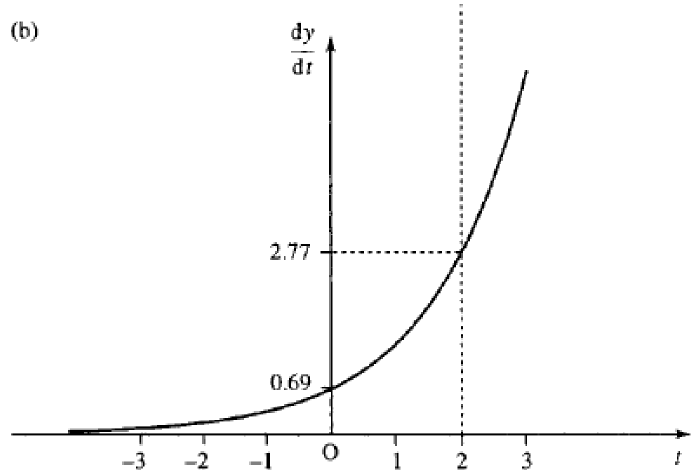


Figure 8.2 *(a) The graph of $y = 2^t$ with some tangents marked. (b) The graph of the derivative (the gradient of the tangent at any point on $y = 2^t$ plotted against t).*

Example

(a) Show that any function of the form $y = y_0 e^t$, where y_0 is a constant, is a solution to the equation

$$\frac{dy}{dt} = y$$

(b) Show that in the function $y = y_0 e^t$, $y = y_0$ when $t = 0$.

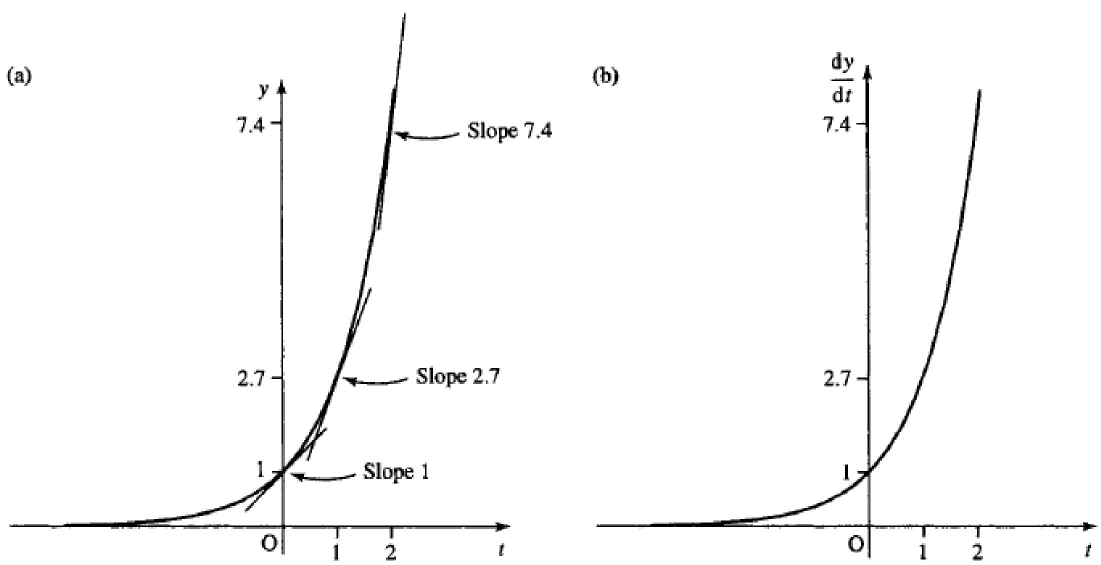


Figure 8.4 *(a) The graph of $y = e^t$ with some tangents marked. (b) The graph of the derivative (the gradient of the tangent at any point on e^t plotted against t).*

Solution

(a) To show that $y = y_0 e^t$ are solutions, we first differentiate

$$\frac{d}{dt}(y_0 e^t) = y_0 e^t$$

(as y_0 is a constant and $d(e^t)/dt = e^t$).

Substitute for dy/dt and for y into the differential equation and we get $y_0 e^t = y_0 e^t$, which is a true statement for all t. Hence the solutions to $dy/dt = y$ are $y = y_0 e^t$.

(b) Substitute $t = 0$ in the function $y = y_0 e^t$ and we get $y = y_0 e^0$. As any number raised to the power of 0 is 1, we have $y = y_0$. Hence y_0 is the value of y at $t = 0$.

Using the function of a function rule we can find the derivative of e^{kt}, where k is some constant, and show that this function can be used to solve differential equations of the form $dy/dt = ky$.

The derivative of a^t

The derivative of $y = 2^t$ can now be found by observing that $2 = e^{(\ln(2))}$. Therefore, $y = 2^t = (e^{\ln(2)})^t = e^{\ln(2)t}$. This is of the form e^{kt} with

$k = \ln(2)$. As

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}) = ke^{kt}$$

then

$$\frac{d}{dt}(e^{\ln(2)^t}) = \ln(2)e^{t\ln(2)}$$

Using again the fact that $e^{\ln(2)t} = (e^{\ln(2)})^t = 2^t$ we get

$$\frac{d}{dt}(2^t) = \frac{d}{dt}(e^{\ln(2)t}) = \ln(2)e^{\ln(2)t} = \ln(2)2^t$$

that is

$$\frac{d}{dt}(2^t) = \ln(2)2^t$$

The derivative of $y = \ln(x)$

$y = \ln(x)$ is the inverse function of $f(x) = \mathrm{e}^x$, and therefore we can find the derivative in a manner similar to that used to find the derivatives of the inverse trigonometric functions in Chapter 5.

$$
\begin{aligned}
&y = \ln(x) \text{ where } x > 0\\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\ln(x)} \text{ (take the exponential of both sides)}\\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = x \text{ (as exp is the inverse function to ln, } \mathrm{e}^{\ln(x)} = x\text{)}
\end{aligned}
$$

We wish to differentiate both sides with respect to x but the left-hand side is a function of y, so we use the chain rule, setting $w = \mathrm{e}^y$, thus, equation $\mathrm{e}^y = x$ becomes $w = x$ and $\mathrm{d}w/\mathrm{d}y = \mathrm{e}^y$.

Differentiating both sides of $w = x$ with respect to x gives $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x = 1$, where

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

from the chain rule. So

$$\mathrm{e}^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

and resubstituting $x = \mathrm{e}^y$ we get

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$

(we can divide by x as $x > 0$). Hence,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

The derivative of the log, of whatever the base, can be found using the change of base rule for logarithms as given in Chapter 4 of the Background Mathematics notes available on the companion website for this book. We can write

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Therefore

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right) = \frac{1}{\ln(a)x}.$$

Example Show that $\cosh(A + B) = \cosh(A)\cosh(B)$ $\sinh(A)\sinh(B)$.

Solution Substitute

$$\cosh(A) = \frac{e^{A} + e^{-A}}{2}$$
$$\sinh(A) = \frac{e^{A} - e^{-A}}{2}$$
$$\cosh(B) = \frac{e^{B} + e^{-B}}{2}$$
$$\sinh(B) = \frac{e^{B} - e^{-B}}{2}$$

into the right-hand side of the expression

$$\cosh(A)\cosh(B) + \sinh(A)\sinh(B)$$
$$= \frac{(e^{A} + e^{-A})}{2}\frac{(e^{B} + e^{-B})}{2}\frac{(e^{A} - e^{-A})}{2}\frac{(e^{B} - e^{-B})}{2}.$$

Multiplying out the brackets gives

$$\tfrac{1}{4}\Big(e^{A+B} + e^{A-B} + e^{-A+B} + e^{-(A+B)}$$
$$+(e^{A+B} - e^{A-B} - e^{-A+B} + e^{-(A+B)})\Big).$$

Simplifying then gives

$$\tfrac{1}{4}(2e^{A+B} + 2e^{-(A+B)}) = \tfrac{1}{2}(e^{A+B} + e^{-(A+B)})$$

which is the definition of $\cosh(A + B)$.

We have shown that the right-hand side of the expression is equal to the left-hand side, and therefore

$$\cosh(A + B) = \cosh(A)\cosh(B) + \sinh(A)\sinh(B).$$

Table 8.3 *The derivatives of some simple functions*

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	nx^{n-1}
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\sin^{-1}(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\cos^{-1}(x)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\tan^{-1}(x)$	$1/(1+x^2)$
e^x	e^x
a^x	$(\ln(a)a^x)$
$\ln(x)$	$1/x$
$\log_a(x)$	$1/(\ln(a)x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\tanh(x)$	$\mathrm{sech}^2(x)$
$\sinh^{-1}(x)$	$1/\sqrt{1+x^2}$
$\cosh^{-1}(x)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\tanh^{-1}(x)$	$1/(1-x^2)$

Table 8.4 *Some standard integrals*

$f(x)$	$\int f(x) dx f(x)$
1	$x+C$
$x^n (n \neq -1)$	$(x^{n+1})/(n+1)+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$
$\sec^2(x)$	$\tan(x)+C$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sin^{-1}(x)+C$
$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\cos^{-1}(x)+C$
$1/(1+x^2)$	$\tan^{-1}(x)+C$
e^x	e^x+C
a^x	$(a^x/\ln(a))+C$
$1/x$	$\ln(x)+C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)+C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)+C$
$\mathrm{sech}^2(x)$	$\tanh(x)+C$
$1/\sqrt{1+x^2}$	$\sinh^{-1}(x)+C$
$1/\sqrt{x^2-1}$	$\cosh^{-1}(x)+C$
$1/(1-x^2)$	$\tanh^{-1}(x)+C$

Example 8.12 Find derivatives of the following:

$$\text{(a) } y = e^{-2t^2+3} \quad \text{(b) } x = e^{-t}\cos(3t) \quad \text{(c) } y = \frac{\sinh(x)}{x} \quad x \neq 0.$$

Solution (a) To differentiate $y = e^{-2t^2+3}$ using the function of a function rule think of this as $y = e^{()}$('y = e to the bracket').

Now differentiate y with respect to ( ) and multiply by the derivative of ( ) with respect to t. That is, use

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d()}\frac{d()}{dt}$$

where ( ) represents the expression in the bracket

$$\frac{dy}{dt} = e^{-2t^2+3}\frac{d}{dt}(-2t^2+3) = e^{-2t^2+3}(-4t) = -4te^{-2t^2+3}.$$

(b) To find the derivative of $x = e^{-t}\cos(3t)$, write $x = uv$ so that $u = e^{-t}$ and $v = \cos(3t)$; then,

$$\frac{du}{dt} = -e^{-t} \qquad \frac{dv}{dt} = -3\sin(3t)$$

where we have used the chain rule to find both these derivatives.

Now use the product rule

$$\frac{dx}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}\cos(3t) - e^{-t}3\sin(3t) = -e^{-t}\cos(3t) - 3e^{-t}\sin(3t).$$

(c) To find the derivative of

$$y = \frac{\sinh(x)}{x}$$

we use the formula for the quotient of two functions where $y = u/$ $\sinh(x)$, $v = x$, and

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

Hence, we get

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right) = \frac{x\cosh(x) - \sinh(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{x^2}.$$

Example Find the following integrals:

(a) $\int x\mathrm{e}^{x^2+2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \sinh(t)\cosh^2(t)\,\mathrm{d}t$ (c) $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \left(\dfrac{3x^2+2x}{x^3+x^2+2}\right)\mathrm{d}x$

Solution (a) $\int x\mathrm{e}^{x^2+2}\,\mathrm{d}x$. Here, we have a function of a function $\mathrm{e}^{(x^2+2)}$ multiplied by a term that is something like the derivative of the term in the bracket.

Try a substitution, $u = x^2+2$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$$

then

$$\int x\mathrm{e}^{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int x\mathrm{e}^u \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^u + C$$

resubstituting $u = x^2+2$ gives

$$\int x\mathrm{e}^{x^2+2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+2} + C$$

(b) To find $\int \sinh(t)\cosh^2(t)\,\mathrm{d}t$ we remember that $\cosh^2(t) = (\cosh(t))^2$, so

$$\int \sinh(t)\cosh^2(t)\,\mathrm{d}t = \int \sinh(t)(\cosh(t))^2\mathrm{d}t$$

$\sinh(t)$ is the derivative of the function in the bracket, $\cosh(t)$, so a substitution, $u = \cosh(t)$, should work:

$$u = \cosh(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sinh(t)$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{\sinh(t)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{\sinh(t)}$$

$$\int \sinh(t)\cosh^2(t)\,\mathrm{d}t = \int \sinh(t)u^2 \frac{\mathrm{d}u}{\sinh(t)} = \int u^2\,\mathrm{d}u$$
$$= u^3 + C$$

resubstituting $u = \cosh(t)$ gives

$$\int \sinh(t)\cosh^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\cosh^3(t)}{3} + C$$

(c) $\int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$. Use integration by parts

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

and choose $u = x$ and $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ giving

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \quad \text{and} \quad v = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

Then

$$\int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$$

(d) $\int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x$. Write $\ln(x) = 1\ln(x)$ and use integration by parts with

$$u = \ln(x) \quad \text{and} \quad \mathrm{d}v = 1\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad v = \int 1\,\mathrm{d}x = x$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\mathrm{d}x \\
&= 2\ln(2) - [x]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - (2-1) \approx 0.3863 \text{ to 4 s.f.}
\end{aligned}$$

(e) We rewrite

$$\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+2}\mathrm{d}x = \int (3x^2+2x)(x^3+x^2+2)^{-1}\,\mathrm{d}x.$$

Notice that there are two brackets. To decide what to substitute we notice that

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3+x^2+2) = 3x^2+2x.$$

so it should work to substitute $u = x^3+x^2+2$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2+2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2x}.$$

The integral becomes

$$\int (3x^2+2x)u^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{3x^2+2x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(u) + C.$$

Resubstituting for u gives

$$\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+2}\,\mathrm{d}x = \ln(x^3+x^2+2) + C.$$

Integration using partial fractions

The fact that expressions like $1/(3x+2)$ can be integrated using a substitution which results in an integral of the form:

$$\int \frac{1}{u} \mathrm{d}u = \ln(u) + C$$

is exploited when we perform the integration of fractional expressions like

$$\frac{2x-1}{(x-3)(x+1)}.$$

We first rewrite the function to be integrated using partial fractions.

Example Find

(a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-3)(x+1)} \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)(2x-1)^2} \mathrm{d}x.$

Solution

(a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-3)(x+1)} \mathrm{d}x.$

Rewrite the expression using partial fractions. We need to find A and B so that:

$$\frac{2x-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+1)}$$

where this should be true for all values of x.

Multiplying by $(x-3)(x+1)$ gives $2x-1 = A(x+1) + B(x-3)$. This is an identity, so we can substitute values for x:

substitute $x = -1$ giving $-3 = B(-4) \quad \Leftrightarrow \quad B = 3/4$

substitute $x = 3$ giving $5 = A(4) \quad \Leftrightarrow \quad A = 5/4$

Hence,

$$\frac{2x-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{5}{4(x-3)} + \frac{3}{4(x+1)}.$$

So

$$\int \frac{2x-1}{(x-3)(x+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{5}{4(x-3)} + \frac{3}{4(x+1)}\mathrm{d}x.$$

As $(x-3)$ and $(x+1)$ are linear functions of x, we can find each part of this integral using substitutions of $u = x-3$ and $u = x+1$:

$$\int \frac{5}{4(x-3)} + \frac{3}{4(x+1)}\mathrm{d}x = \frac{5}{4}\ln(x-3) + \frac{3}{4}\ln(x+1) + C$$

$$\int \frac{2x-1}{(x-3)(x+1)}\mathrm{d}x = \frac{5}{4}\ln(x-3) + \frac{3}{4}\ln(x+1) + C.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{5}{4}\ln(x-3) + \frac{3}{4}\ln(x+1) + C\right) = \frac{5}{4(x-3)} + \frac{3}{4(x+1)}$$

writing this over a common denominator gives

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{5}{4}\ln(x-3) + \frac{3}{4}\ln(x+1) + C\right) &= \frac{5(x+1)+3(x-3)}{4(x-3)(x+1)}\\ &= \frac{5x+5+3x-9}{4(x-3)(x+1)}\\ &= \frac{8x-4}{4(x-3)(x+1)}\\ &= \frac{2x-1}{(x-3)(x+1)}\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)(2x-1)^2}\mathrm{d}x$

Again, we can use partial fractions. Because of the repeated factor in the denominator we use both a linear and a squared term in that factor. We need to find A, B, and C so that

$$\frac{x^2}{(x+2)(2x-1)^2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(2x-1)} + \frac{C}{(2x-1)^2}$$

where this should be true for all values of x.

Multiply by $(x+2)(2x-1)^2$ to get

where this should be true for all values of x.
Multiply by $(x+2)(2x-1)^2$ to get

$$x^2 = A(2x-1)^2 + B(2x-1)(x+2) + C(x+2)$$

This is an identity, so we can substitute values for x

$$\begin{aligned}
&\text{substitute } x = \tfrac{1}{2} \quad \text{giving } 0.25 = C(2.5) \quad \Leftrightarrow \quad C = 0.1\\
&\text{substitute } x = -2 \quad \text{giving } 4 = A(-5)^2 \quad \Leftrightarrow \quad A = 4/25 = 0.16\\
&\text{substitute } x = 0 \quad \text{giving } 0 = A + B(-1)(2) + C(2).
\end{aligned}$$

Using the fact that $A = 0.16$ and $C = 0.1$, we get

$$0 = 0.16 - 2B + 0.2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0.36 - 2B \quad \Leftrightarrow \quad 2B = 0.36 \quad \Leftrightarrow \quad B = 0.18.$$

Then we have

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x+2)(2x-1)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{0.16}{(x+2)} + \frac{0.18}{(2x-1)} + \frac{0.1}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x\\
&= 0.16\ln(x+2) + \frac{0.18}{2}\ln(2x-1) - \frac{0.1}{2}(2x-1)^{-1} + C\\
&= 0.16\ \ln(x+2) + 0.09\ \ln(2x-1) - \frac{0.05}{(2x-1)} + C.
\end{aligned}$$

Check:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(0.16\ln(x+2) + 0.09\ln(2x-1) - \frac{0.05}{2x-1} + C\right)\\
&\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(0.16\ln(x+2) + 0.09\ln(2x-1) - 0.05(2x-1)^{-1} + C)\\
&\qquad = \frac{0.16}{(x+2)} + \frac{0.09}{(2x-1)}(2) + 0.05(2)(2x-1)^{-2}\\
&\qquad = \frac{0.16}{(x+2)} + \frac{0.18}{(2x-1)} + \frac{0.1}{(2x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Writing this over a common denominator gives

$$\begin{aligned}
&\frac{0.16(2x-1)^2 + 0.18(2x-1)(x+2) + 0.1(x+2)}{(x+2)(2x-1)^2}\\
&\quad = \frac{0.16(4x^2-4x+1) + 0.18(2x^2+3x-2) + 0.1x + 0.2}{(x+2)(2x-1)^2}\\
&\quad = \frac{0.64x^2 - 0.64x + 0.16 + 0.36x^2 + 0.54x - 0.36 + 0.1x + 0.2}{(x+2)(2x-1)^2}\\
&\quad = \frac{x^2}{(x+2)(2x-1)^2}.
\end{aligned}$$

الاختبار البعدي

Exercises

1. Using $\frac{d}{dt}(e^t) = e^t$ show that the function $2e^{3t}$ is a solution to the differential equation

$$\frac{dy}{dt} = 3y$$

2. Assuming $p = p_0 e^{kt}$ find p_0 and k such that

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{1200}$$

and $p = 1$ when $t = 0$.

3. Assuming $N = N_0 e^{kt}$ find N_0 and k such that

$$\frac{dN}{dt} = -4.3 \times 10^{-4} N \quad \text{and} \quad N = 5 \times 10^6 \ \text{at } t = 0.$$

4. Assuming $\phi = Ae^{kt} + 300$ find A and k such that

$$\frac{d\phi}{dt} = -0.1(\phi - 300) \quad \text{and} \quad \phi = 400 \ \text{when } t = 0.$$

5. Using the definitions of

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

7. Calculate the following and where possible use the appropriate inverse functions to check your result:

(a) $\cosh(2.1)$ (b) $\tanh(3)$ (c) $\sinh^{-1}(0.6)$
(d) $\tanh^{-1}(1.5)$ (e) $\cosh^{-1}(-1.5)$

8. Differentiate the following:

(a) $z = e^{t^2-2}$ (b) $x = e^{-t}\cosh(2t)$
(c) $\dfrac{x^2-1}{\sinh(x)}$ (d) $\ln(x^3 - 3x)$
(e) $\log_2(2x)$ (f) a^{4t}
(g) $2^t t^2$ (h) $1/(e^{t-1})^2$

9. Find the following integrals:

(a) $\displaystyle\int e^{4t-3}dt$ (b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{4t-1}$

(c) $\displaystyle\int x\sinh(2x^2)dx$ (d) $\displaystyle\int x\ln(x)dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 e^x x^2 dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}dt$

الاسبوع الرابع والعشرون

الطرق العددية في التكامل,قاعدة شبه المنحرف(حساب حجم الكميات الترابية ومساحة المقاطع الطولية)

Numerical Methods of Integration

Many problems may be difficult to solve analytically. In such cases numerical methods may be used. This is often necessary in order to perform integrations. The following integrals could not be solved by the methods of integration we have met so far:

$$\int_2^3 \frac{\sin(x)}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_{-3}^2 2^{x^2}\,dx$$

Numerical methods can usually only give an approximate answer.

General method

We wish to approximate the integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Formulae for numerical integration are obtained by considering the area under the graph and splitting the area into strips, as in Figure 7.11. The area of the strips can be approximated using the trapezoidal rule or Simpson's rule. In each case, we assume that the thickness of each strip is h and that there are N strips, so that

$$h = \frac{(b-a)}{N}$$

Numerical methods are obviously to be used with a computer or possibly a programmable calculator. However, it is a good idea to be able to check some simple numerical results, which needs some understanding of the algorithms used.

The trapezoidal rule

The strips are approximated to trapeziums with parallel sides of length y_{r-1} and y_r as in Figure 7.12. The area of each strip is $(h/2)(y_{r-1} + y_r)$.

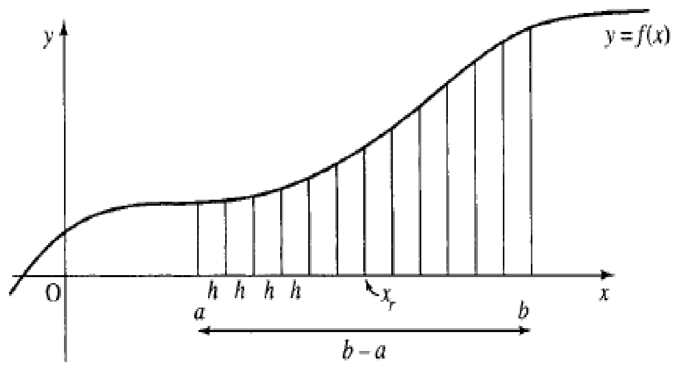


Figure `.11 *Numerical integration is performed by splitting the area into strips of width h. The area of the strips is approximated using the trapezoidal rule or Simpson's rule.*

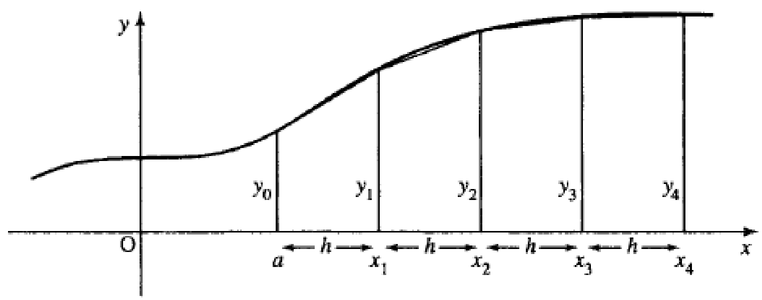


Figure 7.12 *The trapezoidal rule is found by approximating each of the strips as a trapezium.*

The formula becomes:

$$A = h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{N-1} + \tfrac{1}{2}y_N\right)$$

where $x_r = a + rh$.

$$y_r = f(x_r)$$

$$N = \frac{(b-a)}{h}.$$

A computer program would more likely use the equivalent recurrence relation, where A_r is the area up to rth strip (at $x = x_r$)

$$A_r = A_{r-1} + \frac{h}{2}(y_{r-1} + y_r)$$

for $r = 1$ to N and $A_0 = 0$.

This is simply stating that the area is found by adding on the area of one strip at a time to the previously found area.

Example We wish to approximate

$$\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x.$$

The limits of the integration are 1 and 3, so $a = 1$ and $b = 3$. We choose a step size of 0.5, therefore,

$$N = \frac{(b-a)}{h} = \frac{(3-1)}{0.5} = 4.$$

Using $x_r = a + rh$ and $y_r = f(x_r)$, which in this case gives $y_r = x_r^2$ we get

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 & y_0 &= (1)^2 = 1\\
x_1 &= 1.5 & y_1 &= (1.5)^2 = 2.25\\
x_2 &= 2 & y_2 &= (2)^2 = 4\\
x_3 &= 2.5 & y_3 &= (2.5)^2 = 6.25\\
x_4 &= 3 & y_4 &= (3)^2 = 9.
\end{aligned}$$

Using the formula for the trapezoidal rule:

$$A = h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{N-1} + \tfrac{1}{2}y_N)$$

we get

$$A = 0.5(0.5 + 2.25 + 4 + 6.25 + 4.5) = 8.75.$$

Hence, by the trapezoidal rule:

$$\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x \approx 8.75.$$

Simpson's rule

For Simpson's rule, the area of each strip is approximated by drawing a parabola through three adjacent points (see Figure 7.13). Notice that the number of strips must be even.

The area of the strips in this case is not obvious as in the case of the trapezoidal rule. Three strips together have an area of:

$$\frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

where $r = 2n$. The formula then becomes

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N)$$

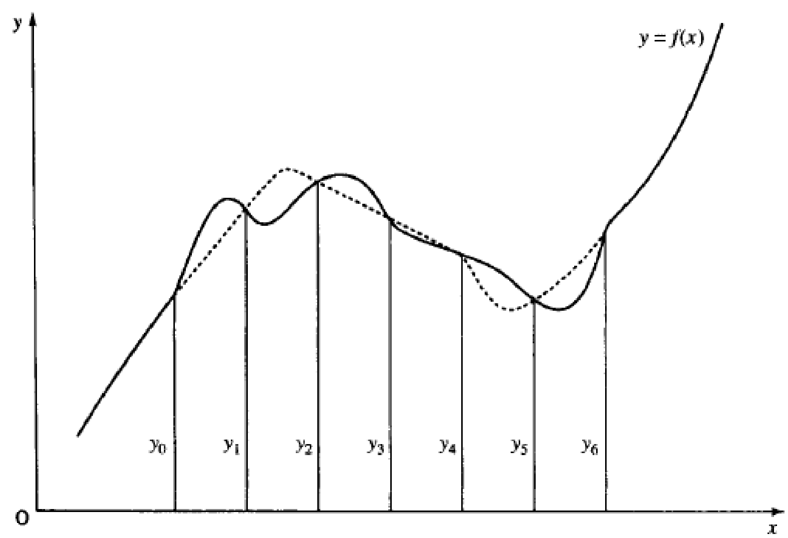


Figure 7.13 *Simpson's rule is found by approximating the areas of the strips by drawing a parabola through three adjacent points. To do this the total number of strips must be even.*

where

$$x_r = a + rh, \quad y_r = f(x_r), \quad N = \frac{(b-a)}{h}$$

as before.

Again, a computer program would more likely use the recurrence relation to define the area

$$A_{2n} = A_{2(n-1)} + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

where $r = 1, \ldots, N/2$ and $A_0 = 0$.

Example Find $\int_1^3 x^2\,dx$ using Simpson's rule with $h = 0.5$.

Solution From the limits of the integral we find that $a = 1$ and $b = 3$. So,

$$N = \frac{(b-a)}{h} = \frac{(3-1)}{0.5} = 4.$$

Using $x_r = a + rh$ and $y_r = f(x_r)$, which in this case gives

$$y_r = x_r^2$$

we get

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1 & y_0 = (1)^2 = 1 \\ x_1 = 1.5 & y_1 = (1.5)^2 = 2.25 \\ x_2 = 2 & y_2 = (2)^2 = 4 \\ x_3 = 2.5 & y_3 = (2.5)^2 = 6.25 \\ x_4 = 3 & y_4 = (3)^2 = 9. \end{array}$$

Hence,

$$A = \frac{0.5}{3}(1 + 4(2.25) + 2(4) + 4(6.25) + 9) \approx 8.66667.$$

In this case, as we are integrating a parabola the result is exact (except for rounding errors).

الاختبار البعدي

1. Find the mean value of $i(t) = 5 - \cos(t/2)$ for $t = 0$ to $t = 5$.
2. Calculate the r.m.s. value of $i = 3\cos(50\pi t)$ between $t = 0$ and $t = 0.01$.
3. Approximate:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

   (a) using the trapezoidal rule with $h = 0.2$ and $h = 0.1$; (b) using Simpson's rule with $h = 0.5$ and $h = 0.25$.

4. Find an approximate value of

$$A = \int_1^3 \frac{dx}{x}$$

   (a) by the trapezoidal rule with $N = 6$; (b) by Simpson's rule with $N = 6$.

5. Approximate $\int_0^1 x^5\,dx$ using Simpson's rule with $N = 10$.

الاسبوع الخامس والعشرون

حل المعادلات التفاضلية المنفصلة والمتجانسة والخطية

Linear ODEs. Bernoulli Equation.

Linear ODEs or ODEs that can be transformed to linear form are models of various phenomena, for instance, in physics, biology, population dynamics, and ecology, as we shall see. A first-order ODE is said to be ***linear*** if it can be written

(1) $$y' + p(x)y = r(x).$$

Homogeneous Linear ODE. We want to solve (1) in some interval $a < x < b$, call it J, and we begin with the simpler special case that $r(x)$ is zero for all x in J. (This is sometimes written $r(x) \equiv 0$.) Then the ODE (1) becomes

(2) $$y' + p(x)y = 0$$

and is called **homogeneous.** By separating variables and integrating we then obtain

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx, \qquad \text{thus} \qquad \ln|y| = -\int p(x)\,dx + c^*.$$

Taking exponents on both sides, we obtain the general solution of the homogeneous ODE (2),

(3) $$y(x) = ce^{-\int p(x)\,dx} \qquad (c = \pm e^{c^*} \quad \text{when} \quad y \gtrless 0);$$

here we may also choose $c = 0$ and obtain the **trivial solution** $y(x) = 0$ for all x in that interval.

Nonhomogeneous Linear ODE. We now solve (1) in the case that $r(x)$ in (1) is no everywhere zero in the interval J considered. Then the ODE (1) is called **nonhomogeneous** It turns out that in this case, (1) has a pleasant property; namely, it has an integratin factor depending only on x. We can find this factor $F(x)$ by Theorem 1 in the last section For this purpose we write (1) as

$$(py - r)\,dx + dy = 0.$$

EXAMPLE 1 First-Order ODE, General Solution

Solve the linear ODE

$$y' - y = e^{2x}.$$

Solution. Here,

$$p = -1, \qquad r = e^{2x}, \qquad h = \int p\, dx = -x$$

and from (4) we obtain the general solution

$$y(x) = e^{x}\left(\int e^{-x}e^{2x}\, dx + c\right) = e^{x}(e^{x} + c) = ce^{x} + e^{2x}.$$

From (4*) and (5) we see that the response to the input is e^{2x}.

In simpler cases, such as the present, we may not need the general formula (4), but may wish to proceed directly, multiplying the given equation by $e^{h} = e^{-x}$. This gives

$$(y' - y)e^{-x} = (ye^{-x})' = e^{2x}e^{-x} = e^{x}.$$

Integrating on both sides, we obtain the same result as before:

$$ye^{-x} = e^{x} + c, \qquad \text{hence} \qquad y = e^{2x} + ce^{x}.$$

■

EXAMPLE 2 First-Order ODE, Initial Value Problem

Solve the initial value problem

$$y' + y \tan x = \sin 2x, \qquad y(0) = 1.$$

Solution. Here $p = \tan x$, $r = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$, and

$$\int p\, dx = \int \tan x\, dx = \ln|\sec x|.$$

From this we see that in (4),

$$e^{h} = \sec x, \qquad e^{-h} = \cos x, \qquad e^{h}r = (\sec x)(2 \sin x \cos x) = 2 \sin x,$$

and the general solution of our equation is

$$y(x) = \cos x\left(2\int \sin x\, dx + c\right) = c \cos x - 2 \cos^2 x.$$

From this and the initial condition, $1 = c \cdot 1 - 2 \cdot 1^2$; thus $c = 3$ and the solution of our initial value problem is $y = 3 \cos x - 2 \cos^2 x$. Here $3 \cos x$ is the response to the initial data, and $-2 \cos^2 x$ is the response to the input $\sin 2x$.

■

Homogeneous Linear ODEs of Second Order

We have already considered first-order linear ODEs (Sec. 1.5) and shall now define and discuss linear ODEs of second order. These equations have important engineering applications, especially in connection with mechanical and electrical vibrations (Secs. 2.4, 2.8, 2.9) as well as in wave motion, heat conduction, and other parts of physics, as we shall see in Chap. 12.

A second-order ODE is called **linear** if it can be written

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1}$$

and **nonlinear** if it cannot be written in this form.

The distinctive feature of this equation is that it is *linear in y and its derivatives,* whereas the functions p, q, and r on the right may be any given functions of x. If the equation begins with, say, $f(x)y''$, then divide by $f(x)$ to have the **standard form** (1) with y'' as the first term, which is practical.

If $r(x) \equiv 0$ (that is, $r(x) = 0$ for all x considered; read "$r(x)$ is identically zero"), then (1) reduces to

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

and is called **homogeneous.** If $r(x) \not\equiv 0$, then (1) is called **nonhomogeneous.** This is similar to Sec. 1.5.

For instance, a nonhomogeneous linear ODE is

$$y'' + 25y = e^{-x} \cos x,$$

and a homogeneous linear ODE is

$$xy'' + y' + xy = 0, \qquad \text{in standard form} \qquad y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0.$$

An example of a nonlinear ODE is

$$y''y + y'^2 = 0.$$

The functions p and q in (1) and (2) are called the **coefficients** of the ODEs. **Solutions** are defined similarly as for first-order ODEs in Chap. 1. A function

$$y = h(x)$$

is called a *solution* of a (linear or nonlinear) second-order ODE on some open interval I if h is defined and twice differentiable throughout that interval and is such that the ODE becomes an identity if we replace the unknown y by h, the derivative y' by h', and the second derivative y'' by h''. Examples are given below.

Homogeneous Linear ODEs: Superposition Principle

Sections 2.1–2.6 will be devoted to **homogeneous** linear ODEs (2) and the remaining sections of the chapter to nonhomogeneous linear ODEs.

Linear ODEs have a rich solution structure. For the homogeneous equation the backbone of this structure is the *superposition principle* or *linearity principle,* which says that we can obtain further solutions from given ones by adding them or by multiplying them with any constants. Of course, this is a great advantage of homogeneous linear ODEs. Let us first discuss an example.

EXAMPLE 1 Homogeneous Linear ODEs: Superposition of Solutions

The functions $y = \cos x$ and $y = \sin x$ are solutions of the homogeneous linear ODE

$$y'' + y = 0$$

for all x. We verify this by differentiation and substitution. We obtain $(\cos x)'' = -\cos x$; hence

$$y'' + y = (\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0.$$

Similarly for $y = \sin x$ (verify!). We can go an important step further. We multiply $\cos x$ by any constant, for instance, 4.7, and $\sin x$ by, say, -2, and take the sum of the results, claiming that it is a solution. Indeed, differentiation and substitution gives

$$(4.7 \cos x - 2 \sin x)'' + (4.7 \cos x - 2 \sin x) = -4.7 \cos x + 2 \sin x + 4.7 \cos x - 2 \sin x = 0. \quad ■$$

In this example we have obtained from y_1 ($= \cos x$) and y_2 ($= \sin x$) a function of the form

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \qquad (c_1, c_2 \text{ arbitrary constants}). \tag{3}$$

This is called a **linear combination** of y_1 and y_2. In terms of this concept we can now formulate the result suggested by our example, often called the **superposition principle** or **linearity principle.**

THEOREM 1 Fundamental Theorem for the Homogeneous Linear ODE (2)

For a homogeneous linear ODE (2), *any linear combination of two solutions on an open interval I is again a solution of* (2) *on I. In particular, for such an equation, sums and constant multiples of solutions are again solutions.*

EXAMPLE 2 A Nonhomogeneous Linear ODE

Verify by substitution that the functions $y = 1 + \cos x$ and $y = 1 + \sin x$ are solutions of the nonhomogeneous linear ODE

$$y'' + y = 1,$$

but their sum is not a solution. Neither is, for instance, $2(1 + \cos x)$ or $5(1 + \sin x)$. ■

الاختبار البعدي

تمارين :

Reduce to first order and solve (showing each step in detail).

1. $y'' = ky'$
2. $y'' = 1 + y'^2$
3. $yy'' = 4y'^2$
4. $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y_1 = x^{-1}$
5. $y'' + y'^3 \sin y = 0$
6. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x$

الاسبوع السادس والعشرون

إيجاد قيمة أعلى أو أوطأ نقطة منحني شاقولي

Introduction

Differentiation can be used to examine the behaviour of a function and find regions where it is increasing or decreasing, and where it has maximum and minimum values. For instance, we may be interested in finding the maximum height, maximum power, or generating the maximum profit, or in finding ways to use the minimum amount of energy or minimum use of materials. Maximum and minimum points can also help in the process of sketching a function.

Stationary points, local maxima and minima

Example 11.1 Throw a stone in the air and initially it will have a positive velocity as the height, s, increases; that is, $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t > 0$. At some point it will start to fall back to the ground, the distance from the ground is then decreasing, and the velocity is negative, $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t < 0$. In order to go from a positive velocity to a negative velocity there must be a turning point, where the stone is at its maximum height and the velocity is zero. If the stone has initial velocity $20\,\mathrm{ms}^{-1}$, how can we find the maximum height that it reaches?

In order to express the velocity of the stone we can make the assumption that air resistance is negligible and use the relationship between distance and time for motion under constant acceleration, giving

$$s = ut + \tfrac{1}{2}at^2$$

where s is the distance travelled, u the initial velocity, t is time, and a the acceleration. In this case, $u = 20\,\mathrm{ms}^{-1}$ and $a = -g$ (acceleration due to gravity $\approx 10\,\mathrm{ms}^{-2}$), so $s = 20t - 5t^2$.

At the maximum height, the rate of change of distance with time must be 0, that is, the velocity is 0. Therefore, we differentiate to find the velocity:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 20 - 10t$$

Putting $v = 0$ gives

$$0 = 20 - 10t \quad \Leftrightarrow \quad 10t = 20 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2$$

We have shown that the maximum height is reached after 2 s. But what is that height? Substituting $t = 2$ into the equation for s gives

$$s = 20(2) - 5(2)^2 = 20\,\text{m}$$

giving the maximum value of s as 20 m.

This example illustrates the important step in finding maximum and minimum values of a function, $y = f(x)$. That is, we differentiate and solve

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

This may give various values of x. The points where $dy/dx = 0$ are called the stationary points but having found these we still need a way of deciding whether they could be maximum or minimum values. In the example, we knew that a stone thrown into the air must reach a maximum height and then return to the ground, and so by solving $ds/dt = 0$ we would find the time at the maximum. Other problems may not be so clear cut and thus we need a method of distinguishing between different types of stationary points.

A stationary point is classified as either a local maximum, a local minimum, or a point of inflexion. The plural of maximum is maxima and the plural of minimum is minima. The word 'local' is used in the description, because local maxima or local minima do not necessarily give the overall maximum or minimum values of the function. For instance, in Figure 11.1 there is a local maximum at B, but the value of y at $x = x_1$ is actually bigger; hence, the overall maximum value of the function in the range is given by y at x_1.

To see how to classify stationary points, examine Figure 11.1, where points A, B, and C are all stationary points.

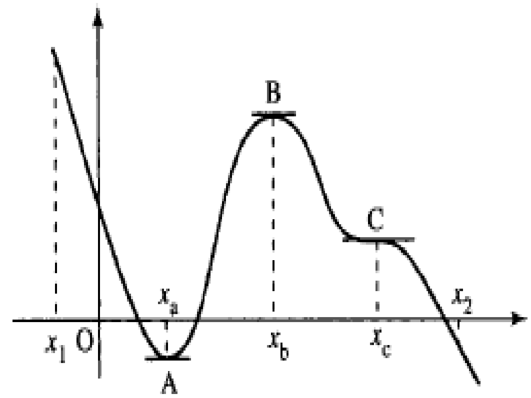
In order to analyse the slope of the function, imagine the function as representing the cross-section of a mountain range and we are crossing it from left to right.

At points A, B, and C in Figure 11.1, the gradient of the tangent to the curve is zero, that is, $dy/dx = 0$.

At A there is a local minimum, where the graph changes from going downhill to going uphill.

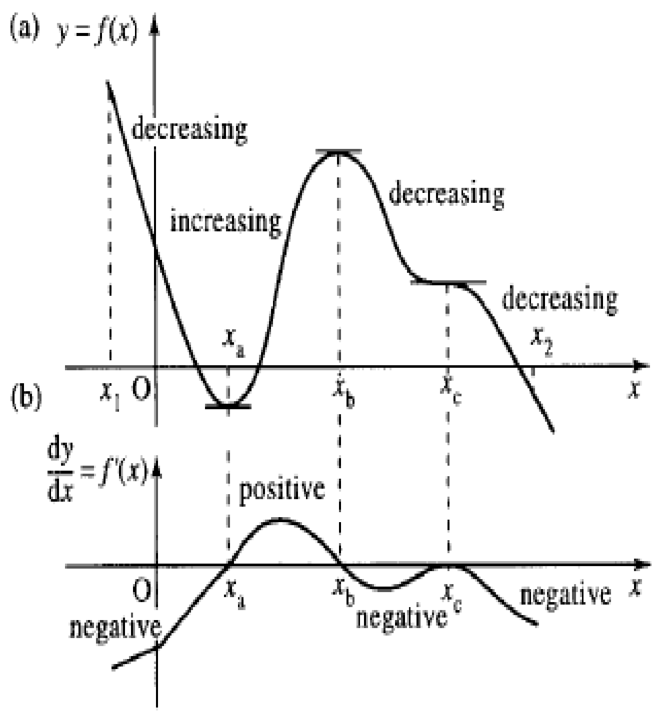
At B there is a local maximum, where the graph changes from going uphill to going downhill.

Figure *A graph of some function $y = f(x)$ plotted from $x = x_1$ to $x = x_2$. Points A, B, and C in the graph are stationary points. They are points where the gradient of the tangent to the curve is zero, that is, $dy/dx = 0$.*



Maxima and minima and sketching functions

Figure *(a) The graph of Figure 11.1. (b) A sketch of its derivative $dy/dx = f'(x)$. Where $y = f(x)$ has a stationary point, that is, where the tangent to the curve is flat, then $dy/dx = 0$. Where $f(x)$ is increasing the derivative is positive and where $f(x)$ is decreasing the derivative is negative.*



Example 1 Find and classify the stationary points of $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$ and find the overall maximum and minimum value of the function in the range $x = 0$ to $x = 5$.

Solution

Step 1. First, we must solve $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 18x + 24$$

So we put

$$3x^2 - 18x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \text{(dividing by 3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)(x-4) = 0$$

Example 2 Find and classify the stationary points of $y = -(2-x)^4$.

Solution

Step 1

$$y = -(2-x)^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4(2-x)^3$$

Stationary points occur where $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$:

$$4(2-x)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Step 2. To classify this stationary point, we differentiate again:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -12(2-x)^2$$

At $x = 2$, we get $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = -12(2-2)^2 = 0$. So the second derivative is zero.

We cannot use the second derivative test to classify the stationary point because a zero value is inconclusive, so we go back to the first derivative and examine its sign at a value of x just less than $x = 2$ and just greater than $x = 2$. This can be done with the help of a table. Choose any values of x less than $x = 2$ and greater than $x = 2$, and here we choose $x = 1$ and $x = 3$. Be careful if the function is discontinuous at any point not to cross the discontinuity

x	1	2	3
$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4(2-x)^3$	4	0	-4

At $x = 1, \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4(2-1)^3 = 4$ (positive); at $x = 3, \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4(2-3)^3 = -4$ (negative). Therefore, near the point $x = 2$ the derivative goes from positive to zero to negative. Therefore, the graph of the function goes from travelling uphill to travelling downhill, showing that we have a maximum value.

Step 3. Finally, we find the value of the function at the maximum point. At $x = 2, y = 0$, that is, there is a maximum at $(2, 0)$.

Exercises

1. Find and classify the stationary points of the following functions:

   (a) $y = x^2 - 5x + 2$ (b) $y = -3x^2 + 4x$

   (c) $y = 3x^3 - x$ (d) $x = 2t + \dfrac{200}{t}$

   (e) $w = z^4 + 4z^3 - 8z^2 + 2$

2. Find the overall maximum and minimum value of $x/(2x^2 + 1)$ in the range $x \in [-1, 1]$

3. Sketch the graphs of the following functions:

   (a) $y = \dfrac{(x-3)(x+5)}{x+2}$ (b) $y = x + \dfrac{1}{x}$

   (c) $y = x^3 - 3x - 1$ (d) $y = \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(x-3)}$

4. Sketch the graph of $y = 2\sin(x) - \sin(2x)$ for x between -2π and 2π.

الاسبوع السابع و العشرون

الاعداد المركبة, جمع طرح, ضرب, قسمة

Complex numbers

In the previous chapter, we have shown that a single frequency wave can be represented by a phasor. We begin this chapter with a brief look at linear system theory. Such systems, when the input is a single frequency wave, produce an output at the same frequency which may be phase shifted with a scaled amplitude. Using complex numbers the system can be represented by a number which multiplies the input phasor having the effect of rotating the phasor and scaling the amplitude. We can define j as the number which rotates the phasor by $\pi/2$ without changing the amplitude. If this multiplication is repeated, hence rotating the phasor by $(\pi/2) + (\pi/2) = \pi$, then the system output will be inverted. In this way we can get the fundamental definition $\mathrm{j}^2 = -1$. j is clearly not a real number as any real number squared is positive. j is called an imaginary number.

The introduction of imaginary numbers allows any quadratic equation to be solved. In previous chapters we said that the equation $ax^2 + bx + c = 0$ had no solutions when the formula leads to an attempt to take the square root of a negative number. The introduction of the number j makes square roots of negative numbers possible and in these cases the equation has complex roots. A complex number, z, has a real and imaginary part, $z = x + \mathrm{j}y$ where x is the real part and y is the imaginary part. Real numbers are represented by points on a number line. Complex numbers need a whole plane to represent them.

We shall look at operations involving complex numbers, the conversion between polar and Cartesian (rectangular) form and the application of complex numbers to alternating current theory.

By looking at the problem of motion in a circle, we show the equivalence between polar and exponential form of complex numbers and represent a wave in complex exponential form. We can also obtain formulae for the sine and cosine in terms of complex exponentials, and we solve complex equations $z^n = c$, where c is a complex number.

Consider a single frequency input of 0 phase and amplitude 1. If there is a system which has the effect of simply shifting the phase by $\pi/2$, then we represent this by the imaginary number j. So $\mathrm{j} \times 1\angle 0 = 1\angle \pi/2$. This system is shown in Figure 10.3(a). Supposing now we consider a system which can be broken into two components both of which shift the phase by $\frac{\pi}{2}$ as shown in Figure 10.3(b). The combined effect of the two systems is to multiply the input by $\mathrm{j} \times \mathrm{j}$. The final output wave, shifted now by π, is the $\cos(\omega t + \pi) = -\cos(\omega t)$ so it is -1 times the initial input. For this to be so then $\mathrm{j} \times \mathrm{j} = -1$.

This is the central definition for complex numbers:

$$\mathrm{j} \times \mathrm{j} = -1$$

meaning that $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$, where j is an operator which rotates a phasor by $\pi/2$.

We will return to these linear time-invariant systems in Chapter 16.

Complex numbers allow us to find solutions to all quadratic equations. Equations like $x^2 + 4 = 0$ do not have real roots because

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$$

and there is no real number, which if squared will give -4.

If we introduce new numbers by using $j = \sqrt{-1}$, then a solution to $x^2 + 4 = 0$ is $x = j2$. j2 is an imaginary number. To check that j2 is in fact a solution to $x^2 + 4 = 0$, substitute it into the equation $x^2 + 4 = 0$, to give

$$\begin{aligned}(j2)^2 + 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad j^2(2)^2 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (-1)(4) + 4 = 0 \ \text{ using } j^2 = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = 0\end{aligned}$$

which is true.

Therefore, $x = j2$ is a solution. In order to solve all possible quadratic equations we need to use complex numbers, that is numbers that have both real and imaginary parts. Mathematicians often use i instead of j to represent $\sqrt{-1}$. However, j is used in engineering work to avoid confusion with the symbol for the current.

Real and imaginary parts and the complex plane

A complex number, z, can be written as the sum of its real and imaginary parts:

$$z = a + jb$$

where a and b are real numbers.

The real part of z is a ($\text{Re}(z) = a$). The imaginary part of z is $b (\text{Im}(z) = b)$.

Complex numbers can be represented in the complex plane (often called an Argand diagram) as the points (x, y) where

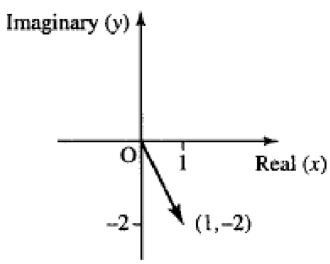


Figure 10.4 *The number $z = 1 - j2$. The real part is plotted along the x-axis and the imaginary part along the y-axis.*

$$z = x + jy$$

for example, $z = 1 - j2$ is shown in Figure 10.4. The methods used for visualizing and adding and subtracting complex numbers is the same as that used for two-dimensional vectors in Chapter 9.

Equality of two complex numbers

Two complex numbers can only be equal if their real parts are equal and their imaginary parts are equal.

Example 10.1 If $a - 2 + jb = 6 + j2$, where a and b are known to be real numbers, then find a and b

Solution

$$a - 2 + jb = 6 + j2$$

We know that a and b are real, so

$$\begin{aligned}a - 2 &= 6 \quad \text{(real parts must be equal)} \\ \Leftrightarrow a &= 8 \\ b &= 2 \quad \text{(imaginary parts must be equal)}\end{aligned}$$

Check by substituting $a = 8$ and $b = 2$ into

$$a - 2 + jb = 6 + j2$$

which gives

$$8 - 2 + j2 = 6 + j2$$
$$\Leftrightarrow 6 + j2 = 6 + j2$$

which is correct

Addition of complex numbers

To add complex numbers, add the real parts and the imaginary parts.

Example 10.2 Given $z_1 = 3 + j4$ and $z_2 = 1 - j2$, find $z_1 + z_2$.

Solution

$$z_1 + z_2 = 3 + j4 + 1 - j2 = (3 + 1) + j(4 - 2) = 4 + j2$$

On the Argand diagram, the numbers add like vectors by the parallelogram law as in Figure 10.5.

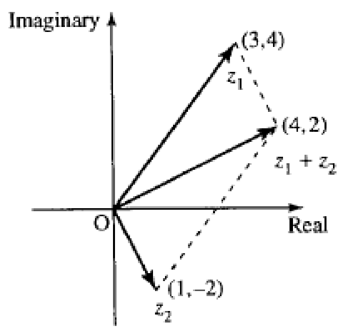


Figure 10.5 *Adding two complex numbers using the parallelogram law.*

Subtraction of complex numbers

To subtract complex numbers, we subtract the real and imaginary parts.

Example 10.3 Given $z_1 = 3 + j4$ and $z_2 = 1 - j2$, find $z_1 - z_2$.

Solution

$$z_1 - z_2 = 3 + j4 - (1 - j2) = 3 - 1 + j(4 - (-2)) = 2 + j6.$$

On the Argand diagram, reverse the vector z_1 to give $-z_2$ and then add z_1 and $-z_2$ as in Figure 10.6.

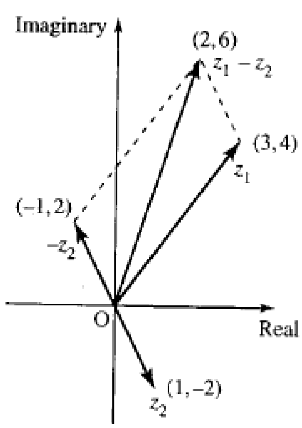


Figure 10.6 *To find $z_1 - z_2$*

Multiplication of complex numbers

To multiply complex numbers multiply out the brackets, as for any other expression, and remember that $j^2 = -1$.

Example 10.4 Given $z_1 = 3 + j4$ and $z_2 = 1 - j2$, find $z_1 \cdot z_2$.

Solution

$$z_1 z_2 = (3 + j4)(1 - j2) = 3 + j4 + 3(-j2) + (j4)(-j2)$$

on an Argand diagram, reverse vector z_2 to give $-z_2$ and then add giving $z_1 + -z_2$.

$$= 3 + j4 - j6 - j^2 8$$
$$= 3 - j2 + 8 \quad (\text{using } j^2 = -1)$$
$$= 11 - j2.$$

Example 10.5 Find $(4 - j2)(8 - j)$.

Solution Multiplying as before gives

$$(4 - j2)(8 - j) = 32 - j16 - j4 + (-j2)(-j)$$
$$= 32 - j20 + j^2 2$$

Using $j^2 = -1$ gives $32 - j20 - 2 = 30 - j20$

The complex conjugate

The complex conjugate of a number, $z = x + jy$, is the number with equal real part and the imaginary part negated. This is represented by z^*:

$$z^* = x - jy$$

A number multiplied by its conjugate is always real and positive (or zero). For example, $z = 3 + j4 \Leftrightarrow z^* = 3 - j4$.

$$zz^* = (3 + j4)(3 - j4) = (3)(3) + (j4)3 + 3(-j4) + (j4)(-j4)$$
$$= 9 + j12 - j12 - j^2 16$$
$$= 9 - j^2 16 = 9 + 16 = 25 \quad (\text{using } j^2 = -1).$$

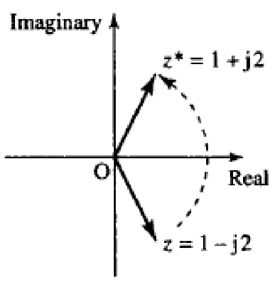


Figure 10.7 *The complex conjugate of a number can be found by reflecting the number in the real axis in the diagram are shown. The diagram shows $1 - j2$ and its conjugate $1 + j2$.*

Note that the conjugate of the conjugate takes you back to the original number.

$$z = 3 + j4$$
$$z^* = 3 - j4$$
$$z^{**} = 3 + j4 = z$$

The conjugate of a number can be found on an Argand diagram by reflecting the position of the number in the real axis (see Figure 10.7).

Example Find complex conjugates of the following and show that zz^* is real and positive, or zero, in each case

(a) $2 - \mathrm{j}5$ (b) $-4 + \mathrm{j}2$ (c) -5 (d) $\mathrm{j}6$
(e) $a + \mathrm{j}b$, where a and b are real.

Solution (a) The conjugate of $2 - \mathrm{j}5$ is

$$(2 - \mathrm{j}5)^* = 2 + \mathrm{j}5$$

Hence

$$\begin{aligned} zz^* &= (2 - \mathrm{j}5)(2 + \mathrm{j}5) = (2)(2) + (-\mathrm{j}5)2 + 2(\mathrm{j}5) + (-\mathrm{j}5)(\mathrm{j}5) \\ &= 4 - \mathrm{j}10 + \mathrm{j}10 - \mathrm{j}^2 25 \\ &= 4 - \mathrm{j}^2 25 \quad (\text{using } \mathrm{j}^2 = -1) \\ &= 4 + 25 = 29 \end{aligned}$$

which is real and positive. We have shown that $2 - \mathrm{j}5$ multiplied by its conjugate $2 + \mathrm{j}5$ gives a real, positive number.

(b) $(-4 + j2)^* = -4 - j2$

$$\begin{aligned}(-4 + j2)(-4 - j2) &= (-4)(-4) + (j2)(-4) \\ &\quad + (-4)(-j2) + (j2)(-j2) \\ &= 16 - j8 + j8 - j^2 4 \\ &= 16 - j^2 4 \quad (\text{using } j^2 = -1) \\ &= 16 + 4 = 20\end{aligned}$$

which is real and positive.

(c) -5 is a real number and therefore its complex conjugate is the same: -5. $(-5)^* = -5$ and $(-5)(-5) = 25$, which is real and positive.

(d) $(j6)^* = -j6$

$(j6)(-j6) = -j^2 36 = 36$

which is real and positive.

(e)
$$(a + jb)^* = a - jb$$

$$\begin{aligned}(a + jb)(a - jb) &= (a)(a) + (jb)(a) + (a)(-jb) + (jb)(-jb) \\ &= a^2 + jab - jab - j^2 b^2 = a^2 - j^2 b^2\end{aligned}$$

using $j^2 = -1$, this gives $a^2 + b^2$

As a and b are real, this must be a real number. Also, we know that the square of a real number is greater than or equal to 0. So $a^2 + b^2$ is real, and it is positive if $a \neq 0$, $b \neq 0$ or zero if both a and b are zero.

It is a good idea to remember this last result that $a + jb$ multiplied by its conjugate, $a - jb$, gives $a^2 + b^2$. That is, any number multiplied by its complex conjugate gives the sum of the square of the real part and the square of the imaginary part. This is the same as the value of the modulus of z squared,that is,

$zz^* = |z|^2$.

Division of complex numbers

To divide complex numbers, we use the fact that a number times its conjugate is real to transform the bottom line of the fraction to a real number. If we multiply the bottom line by its complex conjugate, we must also multiply the top line in order not to change the value of the number.

Example 10.7 Given $z_1 = 3 + \mathrm{j}4$ and $z_2 = 1 - \mathrm{j}2$, find z_1/z_2.

Solution

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + \mathrm{j}4}{1 - \mathrm{j}2}$$

$$= \frac{(3 + \mathrm{j}4)(1 + \mathrm{j}2)}{(1 - \mathrm{j}2)(1 + \mathrm{j}2)}$$

Here, we have multiplied the top and bottom line by z_2^* to make the bottom line entirely real. Hence, we get

$$\frac{(3 + \mathrm{j}4 + \mathrm{j}6 + \mathrm{j}^2 8)}{(1 + 2^2)} = \frac{(-5 + \mathrm{j}10)}{5} = \frac{-5}{5} + \frac{\mathrm{j}10}{5} = -1 + \mathrm{j}2.$$

Example Find

$$\frac{-3 + \mathrm{j}2}{10 + \mathrm{j}5}$$

in the form $x + \mathrm{j}y$.

Solution Multiply the top and bottom line by the complex conjugate of $10 + \mathrm{j}5$ to make the bottom line real

$$\frac{-3 + \mathrm{j}2}{10 + \mathrm{j}5} = \frac{(-3 + \mathrm{j}2)(10 - \mathrm{j}5)}{(10 + \mathrm{j}5)(10 - \mathrm{j}5)}$$

$$= \frac{(-3)(10) + \mathrm{j}2(10) + (-3)(-\mathrm{j}5) + (\mathrm{j}2)(-\mathrm{j}5)}{(10^2 + 5^2)}$$

$$= \frac{-30 + \mathrm{j}20 + \mathrm{j}15 - \mathrm{j}^2 10}{125}$$

$$= \frac{-30 + \mathrm{j}20 + \mathrm{j}15 + 10}{125}$$

$$= \frac{-20 + \mathrm{j}35}{125} = \frac{-20}{125} + \frac{\mathrm{j}35}{125} = -0.16 + \mathrm{j}0.28.$$

Example Given that the equation $x^2 - kx + 8 = 0$, where $k \in \mathbb{R}$ has one solution $x = 2 - \mathrm{j}2$ then find the other solution and also the value of k.

Solution We know that non-real solutions must be complex conjugates of each other so if one solution is $x = 2 - \mathrm{j}2$ the other one must be $x = 2 + \mathrm{j}2$. To find k, we use the result that if an equation has exactly two solutions x_1 and x_2, then the equation must be equivalent to $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. We know that $x = 2 + \mathrm{j}2$ or $x = 2 - \mathrm{j}2$, therefore, the equation must be equivalent to

$$(x - (2 + \mathrm{j}2))(x - (2 - \mathrm{j}2)) = 0.$$

Multiplying out the brackets gives:

$$\begin{aligned} x^2 - x(2 + \mathrm{j}2) - x(2 - \mathrm{j}2) + (2 + \mathrm{j}2)(2 - \mathrm{j}2) = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + x(-2 - \mathrm{j}2 - 2 + \mathrm{j}2) + (4 + 4) = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 8 = 0 \end{aligned}$$

Compare $x^2 - 4x + 8 = 0$ with $x^2 - kx + 8 = 0$. The coefficient of x^2 are equal in both cases, as are the constant terms, so the equations would be the same if $-k = -4 \Leftrightarrow k = 4$, giving the solution as $k = 4$.

الاختبار البعدي

Exercises

1. Given $z_1 = 1 - 2j$, $z_2 = 3 + 3j$, and $z_3 = -1 + 4j$.
   (a) Represent z_1, z_2, and z_3, on an Argand diagram.
   (b) Find the following and show the results on the Argand diagram

   (i) $z_1 + z_2$ (ii) $z_3 - z_1$ (iii) z_1^*

   (c) Calculate

   (i) $z_1 + z_2 + z_3$ (ii) $z_1 - z_3 + z_2$ (iii) $z_1 z_1^*$
   (iv) z_1/z_2 (v) $z_1 z_3$.

2. Simplify

   (a) j^8 (b) j^{11} (c) j^{28}

3. Find each of the following complex numbers in the form $a + jb$, where a and b are real:

   (a) $(3 - 7j)(2 + j4)$ (b) $(-1 + 2j)^2$ (c) $\dfrac{4 - j3}{5 - j}$
   (d) $\dfrac{5 + j3}{j(4 - j9)} - \dfrac{6}{j}$

4. Find the real and imaginary parts of $z^2 + 1/z^2$, where $z = (3 + j)/(2 - j)$

5. Given that x and y are real and that $2x - 3 + j(y - x) = x + j2$, find x and y.

الاسبوع الثامن والعشرون

الصيغة القطبية,تحويل الصيغة القطبية الى جبرية وبالعكس,القوىوالجذور,تمثيل الجذور بالرسم

Polar form of a complex number

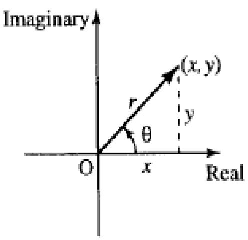


Figure 10.8 *The number $x + jy$ can be expressed in polar form by the length of the line representing the number, r, and the angle it makes to the x axis, θ; that is, $x + jy = r\angle\theta$.*

From the Argand diagram in Figure 10.8, we can see that a complex number can be expressed in terms of the length of the vector (the modulus) and the angle it makes with the x-axis (the argument). This is exactly the same process as that as in expressing vectors in polar coordinates as in Section 9.4.

If $z = x + jy$ then z can be represented in polar form as $r\angle\theta$ where

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Hence

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (+\pi \text{ if } x \text{ is negative})$$

We can write the complex number as

$$z = r\angle\theta$$

r, the modulus of z, is also written as $|z|$.

As it is usual to give the angle between $-\pi$ and π, it may be necessary to subtract 2π from the angle given by this formula. As 2π is a complete rotation, this will make no difference to the position of the complex number on the diagram.

Example 1 Express the following complex numbers in polar form

(a) $3 + j2$ (b) $-2 - j5$
(c) $-4 + j2$ (d) $4 - j2$

Solution To perform these conversions to polar form, it is a good idea to draw a diagram of the number in order to check that the angle is of the correct size (see Figure 10.9).

(a) $3 + j2$ has modulus $r = \sqrt{3^2 + 2^2} \approx 3.61$ and the angle is given by $\tan^{-1}(2/3)$; therefore, in polar form $3 + j2 \approx 3.61\angle 0.59$

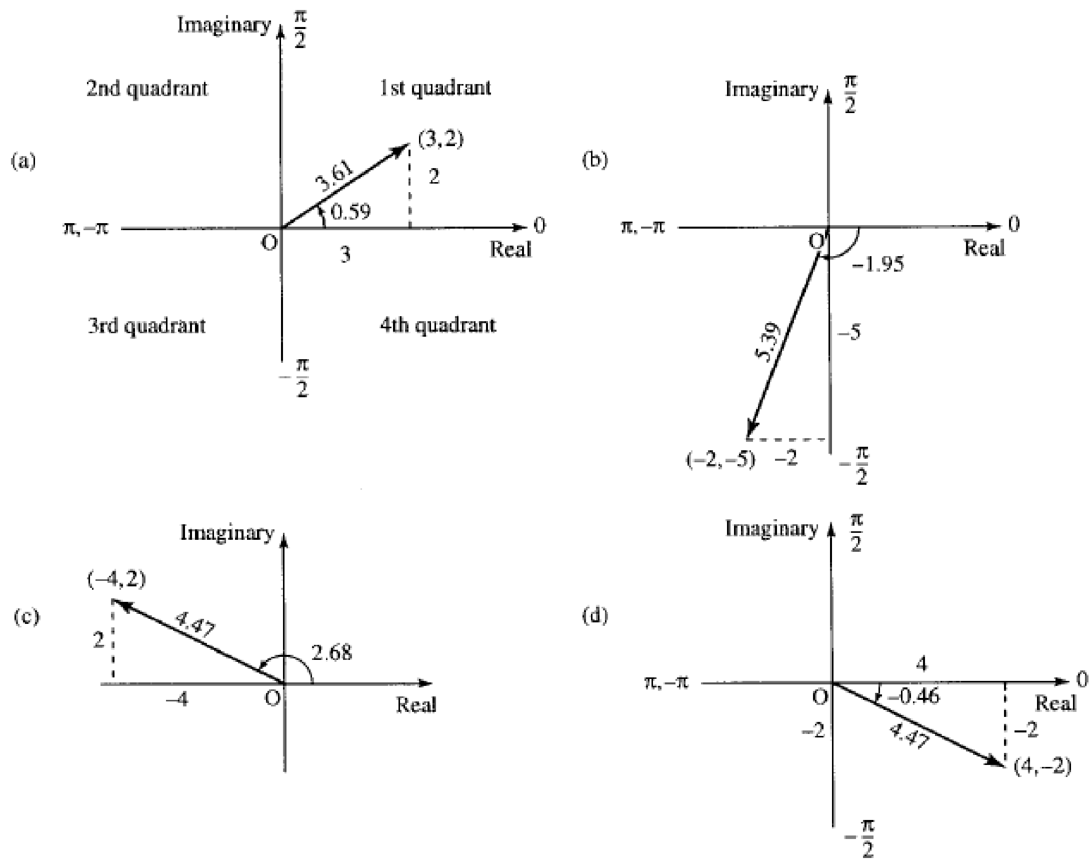


Figure *Conversion to polar form:* (*a*) $3 + j2 \approx 3.61\angle 0.59$; (*b*) $-2 - j5 \approx 5.39\angle{-1.95}$; (*c*) $-4 + j2 \approx 4.47\angle 2.68$; (*d*) $4 - j2 \approx 4.47\angle{-0.46}$.

(b) $-2-j5$ has modulus $r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} \approx 5.39$ and the angle is given by $\tan^{-1}(-5/(-2)) + \pi \approx 4.332$. As this angle is bigger than 2π, subtract 2π (a complete revolution) to give -1.95. Therefore, in polar form $-2 - j5 \approx 5.39\angle - 1.95$. Note that the angle is between $-\pi$ and $-\pi/2$, meaning that the number must lie in the third quadrant, which we can see is correct from the diagram.

(c) $-4 + j2$ has modulus $r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} \approx 4.47$ and the angle is given by $\tan^{-1}(2/(-4)) + \pi \approx -0.46 + \pi \approx 2.68$. Therefore, in polar form $-4+j2 \approx 4.47\angle 2.68$. Note that the angle is between $\pi/2$ and π, meaning that the number must lie in the second quadrant, which we can see is correct from the diagram.

(d) $4 - j2$ has modulus $r = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} \approx 4.47$ and the angle is given by $\tan^{-1}(-2/4) \approx -0.46$. Therefore, in polar form $4 - j2 \approx 4.47\angle - 0.46$. Note that the angle is between $-\pi/2$ and 0 meaning that the number must lie in the fourth quadrant, which we can see is correct from the diagram.

Check the calculations by using the rectangular to polar conversion facility on your calculator.

Conversion from polar form to Cartesian (rectangular) form

If a number is given by its modulus and argument, in polar form, $r\angle\theta$, we can convert back to Cartesian (rectangular) form using:

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{and} \quad y = r\sin(\theta)$$

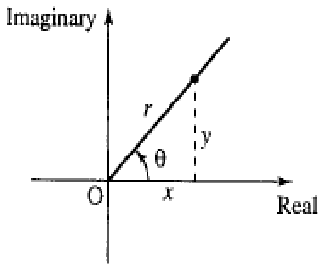


Figure 10.10 *The number $r\angle\theta$ can be written as $x + jy$. Using the triangle, $\cos(\theta) = x/r$ giving $x = r\cos(\theta)$. Also $\sin(\theta) = y/r$ giving $y = r\sin(\theta)$.*

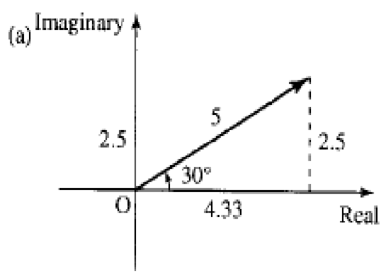
This can be seen from Figure 10.10 and examples are given in Figure 10.11. As $z = x + jy$, $z = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta) = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$.

Addition, subtraction, multiplication, and division of complex numbers in polar form

To add and subtract two complex numbers, always express them first in rectangular form; that is, write as $z = a + jb$. The result of the addition or subtraction then can be converted back to polar form.

To multiply two numbers in polar form, multiply the moduli and add the arguments.

To divide two numbers in polar form divide the moduli and subtract the arguments.



Example Given

$$z_1 = 3\angle\pi/6 \quad z_2 = 2\angle\pi/4$$

Find $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, and z_1/z_2.

Notice that this is the same equation as we had for x. We can represent the motion, both in the x- and y-directions by using a complex number to represent the rotating vector. The real part of z represents the position in the x-direction and the imaginary part of z represents the position in the y-direction:

$$z = x + jy = r\cos(\omega t) + jr\sin(\omega t)$$

Then

$$\frac{dz}{dt} = -r\omega\sin(\omega t) + jr\omega\cos(\omega t)$$

The real part of $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ represents the component of velocity in the x-direction and the imaginary part represents the velocity in the y-direction. Again, we can differentiate to find the acceleration

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} &= -r\omega^2\cos(\omega t) - \mathrm{j}r\omega^2\sin(\omega t)\\ &= -\omega^2(r\cos(\omega t) + \mathrm{j}r\sin(\omega t)) = -\omega^2 z\end{aligned}$$

as

$$z = r\cos(\omega t) + \mathrm{j}r\sin(\omega t)$$

So, we get

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 z$$

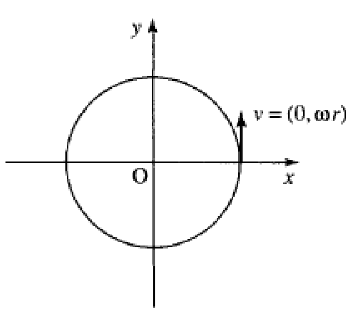
This shows that the acceleration operates along the length of the vector z towards the origin and it must be of magnitude $|-\omega^2 z| = \omega^2 r$ where r is the radius of the circle. The ball is always accelerating towards the centre of the circle. This also tells us the force that the string must provide in order to maintain the circular motion at constant angular velocity. The force towards the centre, called the centripetal force, must be $|F| = m\omega^2 r$, where r is the radius of the circle and m is the mass of the ball. This has been given by Newton's second law $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

We can use the equation for circular motion to show that it is possible to represent a complex number, z, in the form $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$, where r is the modulus and the argument. To do this we must first establish the conditions which determine a particular solution to the equation

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 z$$

We know that one solution of the differential equation

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 z$$



with the condition that $z = r$ when $t = 0$, is given by $z = r\cos(\omega t) + \mathrm{j}r\sin(\omega t)$. Unfortunately, there is at least one other solution, given by the case where the string travels clockwise rather than anti-clockwise, that is, $z = r\cos(-\omega t) + \mathrm{j}r\sin(-\omega t)$. However, we can pin down the solution to the anti-clockwise direction of rotation by using the fact that we defined the angular velocity by $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = \omega$. This gives a condition on the initial velocity (at $t = 0$). From Figure 10.17 we can see that the velocity must be positive and only have a component in the y-direction at $t = 0$.

This discounts the possibility of the motion being clockwise as this would give a negative initial velocity. From $z = r\cos(\omega t) + \mathrm{j}r\sin(\omega t)$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -r\omega\sin(\omega t) + \mathrm{j}r\omega\cos(\omega t)\mathrm{d}t$$

and at $t = 0$, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = \mathrm{j}r\omega$. We now have enough information to say that

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 z \text{ and } z = r \quad \text{when } t = 0$$

and

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega r \text{ when } t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = r\cos(\omega t) + \mathrm{j}r\sin(\omega t)$$

In Chapter 8 we looked at the exponential function and we found that $y = y_0\,\mathrm{e}^{kt}$ is a solution to the equation $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = ky$. This equation models the situation where the rate of change of the population is proportional to its current size: the first derivative of y is proportional to y. The equation

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 z$$

is similar only now the acceleration is related to z, that is the second derivative is proportional to z. As the exponential functions have the property that the derivative gives a scaled version of the original function, we must also get a scaled version of the original function if we differentiate twice. So we can try a solution of the form $z = r\,\mathrm{e}^{kt}$ for the equation

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 z$$

$$z = r\,\mathrm{e}^{kt}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = rk\,\mathrm{e}^{kt}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = rk^2\,\mathrm{e}^{kt}$$

Substituting into

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 z$$

we get

$$rk^2\,\mathrm{e}^{kt} = -\omega^2 r\,\mathrm{e}^{kt}$$

Dividing both sides by $r\,e^{kt}$ gives $k^2 = -\omega^2 \Leftrightarrow k = \pm j\omega$.

This gives two possible solutions: $z = r\,e^{j\omega t}$ when $k = j\omega$ and $z = r\,e^{-j\omega t}$ when $k = -j\omega$. Again, we can use the initial velocity to determine the solution. Using $z = r\,e^{j\omega t}$ we get

$$\frac{dz}{dt} = jr\omega\,e^{j\omega t}$$

at $t = 0$ then we get the velocity as $j\omega r$, which was one of the conditions we wanted to fulfil.

This shows that the two expression $z = r\,e^{j\omega t}$ and $z = r\cos(\omega t) + jr\sin(\omega t)$ both satisfy

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z \text{ and } z = r \quad \text{when } t = 0$$

and

$$\frac{dz}{dt} = j\omega r \quad \text{when } t = 0.$$

We have stated that these initial conditions are enough to determine the solution of the differential equation. So, the only possibility is that

$$r\,e^{j\omega t} = r\cos(\omega t) + jr\sin(\omega t)$$

This shows the equivalence of the polar form of a complex number and the exponential form. Replacing ωt by θ, we get $r\,e^{j\theta} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)$, which we recognize as the polar form for a complex number $z = r\angle\theta$ where r is the modulus and θ is the argument. We can represent any complex number $z = x + jy$ in the form $r\,e^{j\theta}$. r and θ are found, as given before for the polar form, by

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (+\pi \text{ if } x \text{ is negative})$$

Conversely, to express a number given in exponential form in rectangular (Cartesian) form, we can use $r\,e^{j\theta} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)$.

Example Show that $z = 2\,e^{j3t}$ is a solution to $d^2z/dt^2 = -9z$ where $z = 2$ when $t = 0$ and $dz/dt = j6$ when $t = 0$.

Solution If $z = 2\,e^{j3t}$, then when $t = 0$, $z = 2\,e^0 = 2$

$$\frac{dz}{dt} = 2(j3)e^{j3t} = j6e^{j3t}$$

when $t = 0$

$$\frac{dz}{dt} = j6e^0 = j6.$$

Hence

$$\frac{d^2z}{dt^2} = j6(j3)e^{j3t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -18e^{j3t}$$

Substituting into $d^2z/dt^2 = -9z$ gives $-18\,e^{j3t} = -9(2\,e^{j3t}) \Leftrightarrow -18\,e^{j3t} = -18\,e^{j3t}$, which is true.

Example Express $z = 3 + j4$ in exponential form.

Solution The modulus r if given by

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

The argument is $\tan^{-1}(4/3) \approx 0.9273$. Hence, $z \approx 5\,e^{j0.9273}$.

Example Find the real and imaginary parts of the following

(a) $3\,e^{j(\pi/2)}$ (b) e^{-j} (c) e^{3+j2}
(d) $e^{-j(j-1)}$ (e) j^j

Solution (a) Use $r\,e^{j\theta} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta) \cdot 3\,e^{j(\pi/2)}$ has $r = 3$ and $\theta = \pi/2$

$$
\begin{aligned}
3\,e^{j(\pi/2)} &= 3\cos(\pi/2) + j3\sin(\pi/2) \\
&= 3.0 + j(3)(1) = j3
\end{aligned}
$$

The real part is 0 and the imaginary part is 3.

(b) Comparing e^{-j} with $re^{j\theta}$ gives $r = 1$ and $\theta = -1$. Using $r\,e^{j\theta} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)$

$$
\begin{aligned}
e^{-j} &= 1\cos(-1) + j\sin(-1) \\
&\approx 0.5403 - j0.8415
\end{aligned}
$$

So the real part of e^{-j} is approximately 0.5403 and the imaginary part is approximately -0.8415.

$e^3 \approx 20.09$ is a real number, and the remaining exponent j2 is purely imaginary:

$$
e^3 e^{j2} \approx 20.09\,e^{j2}
$$

Comparing e^3e^{j2} with $re^{j\theta}$ gives $r = e^3$ and $\theta = 2$. Using $re^{j\theta} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)$ gives

$$
\begin{aligned}
e^3e^{j2} &= e^3\cos(2) + je^3\sin(2) \\
&\approx -8.359 + j18.26
\end{aligned}
$$

The real part of e^{3+j2} is approximately -8.359 and the imaginary part is approximately 18.26.

(d) For $e^{-j(j-1)}$ we need first to write the exponent in a form that allows us to split it into its real and imaginary bits. So, we remove the brackets to give

$$
e^{-j(j-1)} = e^{-j^2+j}
$$

Using $j^2 = -1$, this gives

$$
e^{-j(j-1)} = e^{1+j}
$$

De Moivre's theorem

Using the expression for the cmoplex number in terms of a sine and cosine, $re^{j\theta} = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$, and using this in $r\,e^{j\theta n} = r\,e^{jn\theta}$, we get

$$(r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta))$$

This is called De Moivre's theorem and can be used to obtain multiple angle formulae.

Example Find $\sin(3\theta)$ in terms of powers of $\sin(\theta)$ and $\cos(\theta)$.

Solution We use the fact that $\sin(3\theta) = \mathrm{Im}(\cos(3\theta) + j\sin(3\theta))$, where Im( ) represents 'the imaginary part of'. Hence

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= \mathrm{Im}(e^{j3\theta})\\ &= \mathrm{Im}((\cos(\theta) + j\sin(\theta))^3).\end{aligned}$$

Expanding

$$\begin{aligned}(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^3 &= (\cos(\theta) + j\sin(\theta))(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^2\\ &= (\cos(\theta) + j\sin(\theta))(\cos^2(\theta) + 2j\cos(\theta)\sin(\theta) + j^2\sin^2(\theta))\\ &= \cos^3(\theta) + j\sin(\theta)\cos^2(\theta) + 2j\cos^2(\theta)\sin(\theta)\\ &\quad + j^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) + 2j^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) + j^3\sin^3(\theta)\\ &= \cos^3(\theta) + 3j\sin(\theta)\cos^2(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - j\sin^3(\theta)\\ &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + j(3\sin(\theta)\cos^2(\theta) - \sin^3(\theta)).\end{aligned}$$

As $\sin(3\theta) = \mathrm{Im}((\cos(\theta) + j\sin(\theta))^3)$, we take the imaginary part of the expression we have found to get

$$\sin(3\theta) = 3\sin(\theta)\cos^2(\theta) - \sin^3(\theta).$$

Example Express $\cos^3(\theta)$ in terms of cosines of multiples of θ.

Solution Using $\cos(\theta) = (1/2)(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ and the expansion $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:

$$\cos^3(\theta) = \left(\frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})\right)^3$$

$$= \frac{1}{2^3}(e^{j3\theta} + 3e^{j\theta} + 3e^{-j\theta} + e^{-j3\theta})$$

$$\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}(e^{j3\theta} + e^{-j3\theta}) + \frac{3}{2}(ej^{\theta} + e^{-j\theta})\right).$$

As

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ and $\cos(3\theta) = \frac{1}{2}(e^{j3\theta} + e^{-j3\theta})$

we get

$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)$.

The exponential form can be used to solve complex equations of the form $z^n = c$, where c is a complex number. A particularly important example is the problem of finding all the solutions of $z^n = 1$, called the n roots of unity.

The *n* roots of unity

To solve the equation $z^n = 1$, we use the fact that 1 is a complex number with modulus 1 and argument 0, as can be seen in Figure 10.19(a). However, we can also use an argument of 2π, 4π, 6π, or any other multiple of 2π. As 2π is a complete revolution, adding 2π on to the argument of any complex number does not change the position of the vector representing it and therefore does not change the value of the number.

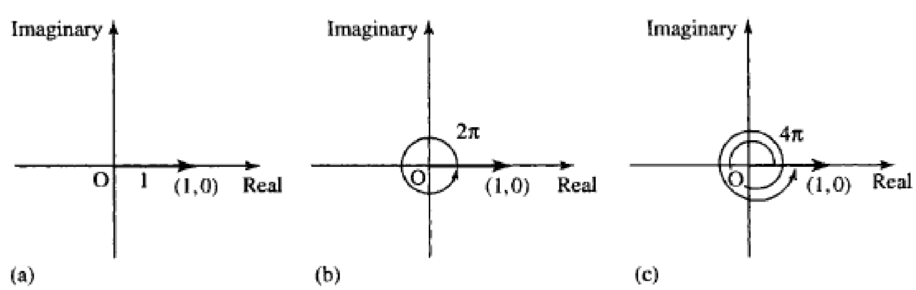


Figure 10.19 *(a) 1 is the complex number* e^{j0}*, that is, with a modulus of 1 and an argument of 0. (b) 1 can also be represented using an argument of* 2π*, that is,* $1 = e^{j2\pi}$*. (c) 1 represented with an argument of* 4π*, that is,* $1 = e^{j4\pi}$*.*

The equation $z^n = 1$ can be expressed as

$z^n = e^{j2\pi N}$ where $N \in \mathbb{Z}$

We can solve this equation by taking the nth root of both sides, which is the same as taking both sides to the power $1/n$.

$(z^n)^{1/n} = e^{j2\pi N/n}$ where $N \in \mathbb{Z}$

We can substitute some values for N to find the various solutions also using the fact that there should be n roots to the equation $z^n = 1$ so that we can stop after finding all n roots.

Example Find all the solutions to $z^3 = 1$.

Solution Write 1 as a complex number with argument $2\pi N$ giving the equation as

$$z^3 = e^{j2\pi N} \quad \text{where } N \in \mathbb{Z}.$$

Taking the cube root of both sides:

$$(z^3)^{1/3} = e^{j(2\pi N/3)} \quad \text{where } N \in \mathbb{Z}.$$

Substituting

$$N = 0: \quad z = e^{j2\pi 0} = 1$$

$$N = 1: \quad z = e^{j2\pi/3}$$

$$N = 2: \quad z = e^{j4\pi/3}.$$

There is no need to use any more values of N. We use the fact that there should be three roots of a cubic equation. If we continued to substitute values for N, then the values will begin to repeat. For example, substituting $N = 3$ gives $z = e^{j2\pi 3/3} = e^{j2\pi}$, which we know is the same as e^{j0} (subtracting 2π from the argument) which equals 1, which is a root that we have already found.

The solutions to $z^3 = 1$ are shown on an Argand diagram in Figure 10.20. The principal root of a complex equation is the one found nearest to the position of the positive x-axis. Notice that in the case of $z^3 = 1$, the principal root is 1 and the other solutions can be obtained from another by rotation through $2\pi/3$. Hence, another way of finding the n roots of $z^n = 1$ is to start with the principal root of $z = 1 = e^{j0}$ and add on multiples of $2\pi/n$ to the argument, in order to find the other roots.

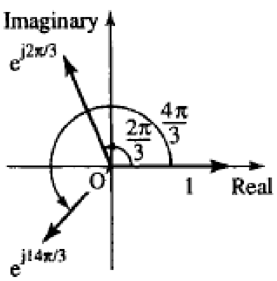


Figure 10.20 *The solutions to $z^3 = 1$ are $z = 1$, $z = e^{j2\pi/3}$, and $z = e^{j4\pi/3}$. Notice that one solution can be obtained from another by rotation through $2\pi/3$.*

Example Find all the roots of $z^5 = 1$

Solution One root, the principal root, is $z = 1 = e^{j0}$. The other roots can be found by rotating this around the complex plane by multiples of $2\pi/5$. Therefore, we have the solutions:

$$z = 1,\ e^{j2\pi/5},\ e^{j4\pi/5},\ e^{j6\pi/5},\ e^{j8\pi/5}.$$

These are shown in Figure 10.21.

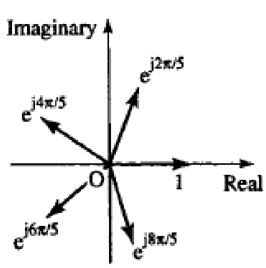


Figure 10.21 *The solutions to $z^5 = 1$ are $z=1$, $e^{j2\pi/5}$, $e^{j4\pi/5}$, $e^{j6\pi/5}$, and $e^{j8\pi/5}$. Notice that one solution can be obtained from another by rotation through $2\pi/5$.*

Solving some other complex equations

If we have the equation $z^n = c$, where c is any complex number, then we write the right-hand side of the equation in exponential form and use the fact that we can add a multiply of 2π to the argument without changing the value of the number. Write

$$c = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+2\pi N)} \quad \text{where } N \in \mathbb{Z}$$

$$z^n = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+2\pi N)}$$

$$\Leftrightarrow z = r^{(1/n)}\mathrm{e}^{(\mathrm{j}(\theta+2\pi N)/n)}$$

taking the nth root of both sides.

Example 1 Solve $z^3 = -4 + \mathrm{j}4\sqrt{3}$.

Solution Write $-4 + j4\sqrt{3}$ in exponential form, $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$

$$r = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$$

$$= \tan^{-1}\left(-\frac{4\sqrt{3}}{4}\right) + \pi = 2\pi/3 \quad (\text{using } \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi/3).$$

So, the equation becomes

$$z^3 = 8\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/3+2\pi N)} \quad \text{where } N \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 8^{1/3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/3+2\pi N)/3}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/3+2\pi N)/3}, \quad \text{where } N \in \mathbb{Z}$$

Substituting some values for N gives

$$N = 0: \quad z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/9}$$

$$N = 1: \quad z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/9+2\pi/3)} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}8\pi/9}$$

$$N = 2: \quad z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/9+4\pi/3)} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}14\pi/9}.$$

The solutions are

$$z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/9},\ 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}8\pi/9},\ 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}14\pi/9}.$$

These are shown in Figure 10.22.

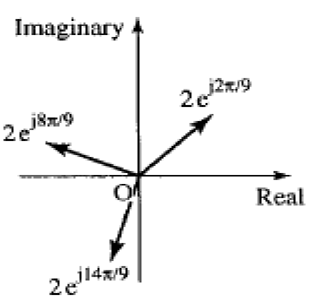


Figure 10.22 *The solutions to $z^3 = -4 + \mathrm{j}4/3$ are $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/9}$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{j}8\pi/9}$, and $2\mathrm{e}^{\mathrm{j}14\pi/9}$. Notice that one solution can be obtained from another by rotation through $2\pi/3$.*

الاختبار البعدي

1 Find the roots x_1 and x_2 of the following quadratic equations. In each case, find the product $(x-x_1)(x-x_2)$ and show that the original equation is equivalent to $(x-x_1)(x-x_2)=0$.

(a) $x^2-3x+2=0$ (b) $-6+2x-x^2=0$
(c) $3x^2-x+1=0$ (d) $4x^2-7x-2=0$
(e) $2x^2+3=0$.

2 The equation $x^2+bx+c=0$ where b and c are real numbers, has one complex root, $x=-1+j3$.

(a) What is the other root?
(b) Find b and c.

3- Convert the following to polar form:

(a) $3+j5$ (b) $-6+j3$
(c) $-4-j5$ (d) $-5-j3$.

4- Express in rectangular (Cartesian) form

(a) $5\angle 225°$ (b) $4\angle 330°$
(c) $2\angle 2.723$ (d) $5\angle -0.646$.

5- If x and y are real and $2x+y+j(2x-y)=15+j6$, find x and y

6- If $z_1=12\angle 3\pi/4$ and $z_2=3\angle 2\pi/5$, find:

(a) z_1z_2 (b) z_1/z_2 (c) z_1+z_2
(d) z_2-z_1 (e) z_1^* (f) z_2^2.

7- giving the results in polar form.

If $z=2\angle 0.8$, find z^4.

8- Find the impedance of the circuit shown in Figure 10.23(a) at 90 kHz, where $L=4$ mH, $C=2$ pF, and $R=400$ kΩ. Assuming a current source of amplitude 5 A, calculate the voltage V and its relative phase.

9- Find the admittance of the circuit given in Figure 10.23(b) at 20 kHz given that $R=250$ kΩ, $L=20$ mH, and $C=50$ pF. Given that the voltage source has amplitude 10 V find the current, I, and its relative phase.

الاسبوع التاسع والعشرون والثلاثون

العمليات الاحصائية,التوزيعات التكرارية,المدرج التكراري,المنحني التكراري,الوسط الحسابي,المدى,الانحراف المعياري التباين والمنحني

بينما الاحتمالات هي الخلفية الرياضية للطرق الإحصائية. واستعمل الناس منذ القدم الاحتمالات والإحصاء لأسباب عقدية وصحية واقتصادية وغيرها. ولكن تأسيس الاحتمالات بشكله الرياضي تم خلال مراسلات كانت بين الفرنسيين *Pierre de Fermat* و *Blaise Pascal* في سنة ١٦٥٤م. بينما يعتبر الإنجليزي *John Graunt* هو أول من قام بتحليل إحصائي في سنة ١٦٦٢م، من خلال دراسته لعدد الوفيات نتيجة أوبئة أصابت مدينة لندن.

وتطبيقات الاحتمالات والإحصاء كثيرة في مختلف الميادين خاصة في الظواهر المعقدة التي يصعب دراستها بدقة.

١.١ المجموعات:

تعريف ١: نسمي مجموعة كل قائمة أشياء أو أعداد أو خليط منهما، وكل شيء من القائمة أو عدد منها هو عنصر من المجموعة.

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن تعريف مجموعة باستخدام خاصية مشتركة لجميع عناصرها بدلا من سرد قائمة عناصرها.

مثال ١: هذه مجموعات معرفة بالقائمة:

$$A = \{0,1,2,3,4,5\}$$
$$B = \{1,3,5,7,9\}$$
$$C = \{-6,-3,0,3,6,9,12,15\}$$

وهذه المجموعات نفسها معرفة بالخاصية:

$A = \{$ عدد صحيح موجب محصور بين ٠ و ٥ $\}$

$B = \{$ عدد فردي محصور بين ١ و ٩ $\}$

$C = \{$ عدد صحيح يقبل القسمة على ٣ ومحصور بين -6 و 15 $\}$

تعريف ٢: نقول عن مجموعة S أنها منتهية إذا كانت قائمتها منتهية أي أن عدد عناصرها هو عدد صحيح غير سالب. في هذه الحالة، نرمز لعدد عناصر S بالرمز: $card(S)$.

مثال ٢: المجموعات المعرفة في المثال ١ كلها منتهية:

$$card(A) = 6, \quad card(B) = 5, \quad card(C) = 8$$

تعريف٣: نقول عن مجموعة A إنها مجموعة جزئية من مجموعة S إذا كانت قائمة A جزء من قائمة S . نرمز لذلك بالرمز: $A \subseteq S$ ونرمز لغير ذلك بالرمز: $A \not\subset S$ ..

مثال٣: نعتبر المجموعات التالية:

$$A = \{1,2,3\}, \quad B = \{0,1,2,3,4,8\}, \quad C = \{-1,0,2,3,5,8\}, \quad D = \{-1,2,5\}$$

المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B ولكن ليست مجموعة جزئية من المجموعة C لأن 1 غير موجود في قائمة C .

بينما المجموعة D مجموعة جزئية من المجموعة C .

تعريف٤: المجموعة الخالية ϕ هي المجموعة بدون أي عنصر، أي أن: $card(\phi) = 0$.

تعريف٥: الجداء الديكاتي $A \times B$ لمجموعتين غير خاليتين A و B هو مجموعة الأزواج (a,b) بحيث a عنصر من A و b عنصر من B .يمكن تعميم الجداء الديكارتي إلى عدة مجموعات بطريقة مماثلة.

مثال٤: نعتبر المجموعات التالية:

$$A = \{0,1,2,5\}, \quad B = \{5,9\}, \quad C = \{0,1\}$$

احسب كلا مما يلي:

١) $A \times B$ ٢) $A \times B \times C$

الحل:

$$1)\ A \times B = \{(0,5),(0,9),(1,5),(1,9),(2,5),(2,9),(5,5),(5,9)\}$$
$$2)\ A \times B \times C = \{(0,5,0),(0,9,0),(1,5,0),(1,9,0),(2,5,0),(2,9,0),(5,5,0),(5,9,0),$$
$$(0,5,1),(0,9,1),(1,5,1),(1,9,1),(2,5,1),(2,9,1),(5,5,1),(5,9,1)\}$$

نظرية١: إذا كانت المجموعتان A و B منتهيتين فإن:

$$card(A \times B) = card(A) \times card(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون إلى عدة مجموعات.

مثال٥: في المثال السابق:

$$card(A \times B) = card(A) \times card(B) = 4 \times 2 = 8$$
$$card(A \times B \times C) = card(A) \times card(B) \times card(C) = 4 \times 2 \times 2 = 16$$

٢. فضاء العينة:

تعريف ٦: نسمي تجربة كل عملية نتحصل من خلالها على قياس أو ملاحظة.

مثال ٦: هذه تجارب:

١) فحص مصباح كهربائي لتقرير هل هو معيب أم لا؟

٢) سحب رقم من علبة تحتوي على الأرقام $1,2,3,4,5,6$ وملاحظة أي رقم سيظهر.

٣) اختيار شخص عشوائيا وسؤاله هل يعجبه نوع جديد من السيارات؟

٤) إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الجهات التي ستظهر (الكتابة أم الصورة).

٥) إلقاء قطعة نقود مرتين وملاحظة الجهات التي ستظهر.

تعريف ٧: فضاء عينة لتجربة ما هو مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة. نرمز له بالرمز S .

تجدر الإشارة أنه يمكن ايجاد عدة فضاءات عينة لتجربة واحدة وذلك حسب الترميز المستخدم وتصور المسألة.

مثال ٧: حدد فضاءات عينة لكل تجربة من المثال ٦.

الحل:

١) النتائج الممكنة للتجربة هي: المصباح معيب، و المصباح غير معيب. نرمز إلى الحالة الأولى بالرمز D وإلى الحالة الثانية بالرمز N . .فيكون: $S=\{N,D\}$.

٢) النتائج الممكنة للتجربة هي الأرقام الستة إذاً: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

٣) النتائج الممكنة للتجربة هي الأجوبة الممكنة للشخص المسؤول: تعجبه السيارة ونرمز له بالرمز: L ، ولا تعجبه ونرمز له بالرمز: D ، وبدون رأي ونرمز له بالرمز: U . فيكون: $S=\{L,D,U\}$.

٤) النتائج الممكنة للتجربة هي ظهور الكتابة ونرمز له بالرمز: T ، وظهور الصورة ونرمز له بالرمز: H

. فيكون: $S=\{H,T\}$.

٥) النتائج الممكنة للتجربة هي الجهات التي تظهر في كل من الرمية الأولى والثانية. باستخدام رموز الفقرة ٤ يكون: $S=\{HH,HT,TH,TT\}=\{H,T\}\times\{H,T\}$.

يمكن أن نختار فضاء عينة دون التفريق بين الرمية الأولى والثانية فيكون: $S=\{\{H,H\},\{H,T\},\{T,T\}\}$ ..

وسنرى لاحقا بأن الفضاء الأول أفضل.

تعريف ٨: نسمي حدثا كل مجموعة جزئية من فضاء العينة. الحدث المستحيل هو المجموعة الخالية.

مثال ٨: نعتبر تجربة سحب رقم من علبة تحتوي على الأرقام $1,2,3,4,5,6$ وملاحظة أي رقم سيظهر.

أحداث ممكنة لهذه التجربة هي كالتالي:

A : ظهور رقم فردي وقائمته هي: $A=\{1,3,5\}$ ،

مثال ٩: ليكن لدينا ٤ مصابيح مرقمة من ١ إلى ٤ من بينها اثنان معيبان هما: ١ و ٢. نسحب اثنان عشوائيا.

١) حدد فضاء عينة للتجربة وحدد عدد عناصره.

٢) أعط قوائم الأحداث التالية: A : الحصول على مصابيح سليمة، B : الحصول على مصباح معيب واحد، C : الحصول على مصباحين معيبين، D : الحصول على مصباح معيب واحد على الأقل.

الحل:

$$1)\ S=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\} \qquad card(S)=6$$

$$2)\ A=\{\{3,4\}\},\quad B=\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\},\quad C=\{\{1,2\}\},$$
$$D=\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,2\}\}$$

تعريف ٩: يمكن أن نعرف العمليات التالية على الأحداث:

١) اتحاد حدثان $A\bigcup B$ هو مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A أو B أو كليهما.

٢) تقاطع حدثان $A\bigcap B$ هو مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A و B في آن واحد.

3) متممة حدث $\overline{A}$ هو مجموعة النتائج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في A.

قانون ديمورغان: $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$ و $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

مثال ١٠: نعتبر تجربة سحب رقم من علبة تحتوي على الأرقام 1,2,3,4,5,6 وملاحظة أي رقم سيظهر

نعتبر الأحداث التالية: A : ظهور رقم أكبر من ٣، B : ظهور رقم أصغر من ٦، C : ظهور رقم زوجي.

١) حدد فضاء عينة وعدد عناصره.

٢) أعط قوائم الأحداث التالية: A و B و C.

٣) أعط قوائم الأحداث التالية: $A\bigcap B$ و $A\bigcap C$ و $B\bigcap C$ و $A\bigcap B\bigcap C$ و $A\bigcup B$ و $A\bigcup C$ و $B\bigcup C$ و $A\bigcup B\bigcup C$.

٤) أعط قوائم الأحداث التالية: $\overline{A}$ و $\overline{B}$ و $\overline{A\bigcup B}$ و $\overline{A}\bigcap\overline{B}$.

٥) صف باستخدام جمل أحداث الفقرة ٤.

الحل:

$$1)\ S=\{1,2,3,4,5,6\} \qquad card(S)=6$$

$$2)\ A=\{4,5,6\},\quad B=\{1,2,3,4,5\},\quad C=\{2,4,6\},$$

$$3)\ A\bigcap B=\{4,5\},\quad A\bigcap C=\{4,6\},\quad B\bigcap C=\{2,4\},\quad A\bigcap B\bigcap C=\{4\}$$
$$A\bigcup B=\{1,2,3,4,5,6\}=S,\quad A\bigcup C=\{2,4,5,6\},\quad B\bigcup C=S,\quad A\bigcup B\bigcup C=S$$

$$4)\ \overline{A}=\{1,2,3\},\quad \overline{B}=\{6\},\quad \overline{A\bigcup B}=\{\}=\phi,\quad \overline{A}\bigcap\overline{B}=\{\}=\phi$$

٥) $\overline{A}$: ظهور رقم أصغر من ٤، $\overline{B}$: ظهور رقم أكبر من ٥ أو ظهور الرقم ٦، $\overline{A\bigcup B}$: عدم ظهور رقم أكبر من ٣ أو أصغر من ٦، $\overline{A}\bigcap\overline{B}$: ظهور رقم أصغر من ٤ و أكبر من ٥.

٥. وسائط العينة :

تعريف ١٤: نسمي عينة كل قائمة صغيرة نسبيا من البيانات مأخوذة من قائمة كبيرة جدا تسمى مجموعة سكانية يصعب سردها.

وذلك بغرض دراسة العينة ومحاولة تعميم نتائج هذه الدراسة على المجموعة السكنية ككل.

مثال ٢٣: لو أردنا أن نعرف رأي طلبة الكلية التقنية في جوانب كثيرة متعلقة بالمكتبة فإنه قد يصعب معرفة آراء جميع الطلبة في كل هذه الجوانب ولهذا نختار مجموعة صغيرة نسبيا ونجري الدراسة.

مجموع طلبة الكلية يمثلون المجموعة السكانية والمجموعة المختارة تمثل عينة.

مثال ٢٤: لو أردنا معرفة أطوال سكان المملكة وأوزانهم بحسب أعمارهم فإنه قد يصعب تحديد ذلك لكل السكان ولهذا نختار مجموعة صغيرة نسبيا من الأشخاص من مختلف الأعمار ونجري الدراسة.

مجموع السكان يمثلون المجموعة السكانية والأشخاص المختارون يمثلون عينة.

سنكتفي في هذه الفقرة بدراسة عينات البيانات المشتملة على قيمة واحدة فقط كأطوال السكان فقط أو أعمارهم فقط أو أوزانهم فقط.

مثال ٢٥: هذه عينة لعدد المستأجرين لـ٤٥ شقة في مدينة ما :

2, 1, 3, 5, 2, 2, 2, 1, 4, 2, 6, 2, 4, 3, 1,
2, 4, 3, 1, 4, 4, 2, 4, 4, 2, 2, 3, 1, 4, 2,
3, 1, 5, 2, 4, 1, 3, 2, 4, 4, 2, 5, 1, 3, 4

تعريف ١٥: طول العينة هو عدد عناصرها وتكرار عنصر ما هو عدد مرات ظهور العنصر في العينة.

مثال ٢٦: نعتبر العينة السابقة.

١) ما هو طول هذه العينة؟

٢) أنشأ جدولا لتكرار العناصر.

الحل:

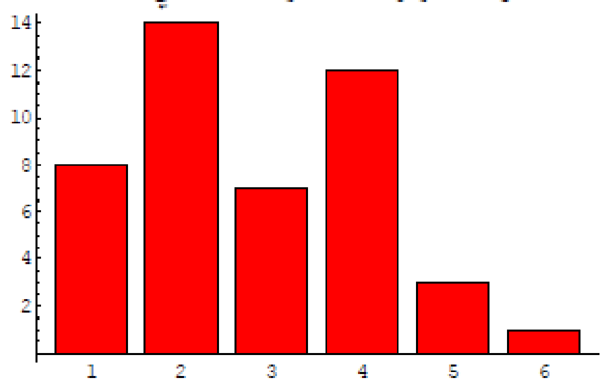
١) طول العينة هو٤٥.

٢) يمكن أن ننشأ جدول التكرار التالي:

عدد الأشخاص	التكرار	التكرار المتراكم
١	٨	٨
٢	١٤	٢٢
٣	٧	٢٩
٤	١٢	٤١
٥	٣	٤٤
٦	١	٤٥
المجموع	٤٥	

كما يمكن أن نمثل العمودين الأولين من هذا الجدول باستخدام ما يسمى بالمدرجات التكرارية التي هي عبارة عن مستطيلات ارتفاعها هو تكرار العنصر كما يلي:

هي عبارة عن مستطيلات ارتفاعها هو تكرار العنصر كما يلي:



تعريف ١٦: لتكن لدينا العينة التالية: $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ يمكن تعريف وسائط العينة التالية:

متوسط العينة هو:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

تباين العينة هو:

$$s^2 = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \cdots + (\bar{x} - x_n)^2}{n-1}$$

الانحراف المعياري للعينة هو:

$$s = \sqrt{s^2}$$

إذا كانت عناصر العينة مرتبة من الأصغر إلى الأكبر (أو العكس) فإن وسيط العينة يعرف كما يلي:

إذا كان n فرديا فإن وسيط العينة هو: $med = x_{\frac{n+1}{2}}$

إذا كان n زوجيا فإن وسيط العينة هو: $med = \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

منوال العينة هو عنصر من العينة يكون تكراره أعلى تكرار. يرمز له بالرمز: $mode$.

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن أن يكون هناك عدة منوالات.

كما أنه يمكن حساب وسائط العينة المعرفة هنا باستخدام جدول التكرار.

المتوسط والوسيط والمنوال تعطينا فكرة عن متوسط القيم بينما التباين والانحراف المعياري تعطينا فكرة عن تشتت القيم.

مثال ٢٧: احسب وسائط العينة المعرفة سابقا للمثال السابق.

الحل:

١) متوسط العينة يمثل مجموع العناصر على عددهم ويمكن حسابه مباشرة كما يمكن حسابه باستخدام جدول التكرار وذلك بضرب العنصر في تكراره ثم الجمع كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{(8\times 1)+(14\times 2)+(7\times 3)+(12\times 4)+(3\times 5)+(1\times 6)}{45} = 2.8$$

٢) الملاحظة نفسها بالنسبة لتباين العينة:

$$s^2 = \frac{8(2.8-1)^2+14(2.8-2)^2+7(2.8-3)^2+12(2.8-4)^2+3(2.8-5)^2+1(2.8-6)^2}{45-1} \cong 1.75$$

٣) الانحراف المعياري للعينة سيكون:

$$s = \sqrt{1.75} \cong 1.32$$

٤) بما أن $n = 45$ فردي إذاً باستخدام عمود التكرار المتراكم فإن وسيط العينة هو:

$$med = x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{45+1}{2}} = x_{23} = 3$$

٤) واضح من جدول التكرار بأن المنوال هو:

$$mode = 2$$

طريقة أخرى للحل:

يمكن حساب متوسط العينة وتباينها باستخدام الآلة الحاسبة كما يلي (مثلا: CASIO $fx-82TL$):

الخطوة الأولى: اختيار نمط الإنحراف المعياري (MODE SD).

الخطوة الثانية: مسح ذاكرة النمط من البيانات (SHIFT Scl =).

الخطوة الثالثة: إدخال البيانات (إدخال العنصر ثم الضغط على DT).

الخطوة الرابعة: حساب المتوسط (SHIFT $\bar{x}$) و الانحراف المعياري (SHIFT $x\sigma_{n-1}$) ثم التباين (وهو مربع الانحراف المعياري).

مثال ٢٨: لتكن لدينا أطوال عشرة مسامير مختارة عشوائيا ومقاسة بالسنتيمتر (سم) كما يلي:

0.80 0.81 0.81 0.82 0.81 0.82 0.80 0.82 0.81 0.81

احسب متوسط هذه العينة وتباينها وانحرافها المعياري ووسيطها ومنوالها.

الحل:

يمكن أن ننشأ جدولا تكراريا لهذه العينة كما يلي:

الأطوال (سم)	التكرار	التكرار المتراكم
٠,٨٠	٢	٢
٠,٨١	٥	٧
٠,٨٢	٣	١٠

باستخدام جدول التكرار نحسب المطلوب:

$$\bar{x} = \frac{(2\times 0.80)+(5\times 0.81)+(3\times 0.82)}{10} = 0.811\,cm$$

$$s^2 = \frac{2(0.811-0.80)^2 + 5(0.811-0.81)^2 + 3(0.811-0.82)^2}{10-1} \cong 0.000\,054\,cm^2$$

$$s = \sqrt{0.000054} \cong 0.007348\,cm$$

$$med = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{10}{2}} + x_{\frac{10}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(0.81+0.81) = 0.81\,cm$$

$$mode = 0.81\,cm$$

الاختبار ألبعدي

تمارين

تمرين ١: أوجد المتوسط والتباين والإنحراف المعياري والوسيط والمنوال للأعداد الستة التالية:

4 6 6 7 9 10

تمرين ٢: نتائج فصل في امتحان من ٢٠ سؤال هي كما يلي:

عدد الإجابات الصحيحة	٩	١٠	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
عدد الطلاب	١	٢	١	٢	٧	٢	١	٧	٢	٦	٤

أوجد وسائط هذه العينة.

تمرين ٣: احسب متوسط العينة التالية وتباينها وانحرافها المعياري ووسيطها ومنوالها:

3 4 10 4 4

لاحظ مساهمة العنصر ١٠ في التباين وعلق على ذلك.

تمرين ٤: احسب المتوسط والتباين لكلا العينتين التاليتين: 111 110 109 و 115 110 105 .

قارن بين العينتين.

تمرين ٥: أنشأ المدرجات التكرارية لكل العينات السابقة.