

(الاسبوع الثالث والرابع)

المحددات DETERMINANTS

إعداد وتصميم: منتهى طه ياسين / مدرس مساعد

المحددات مجموعة عناصر على شكل صفوف او أعمدة رباعي الشكل محصور بين مستقيمين شاقوليين.

القوانين الرئيسية:

المحددات من الدرجة الثانية عناصرها تصف بالصورة التالية وتحل بحاصل ضرب أقطارها:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

المحددات من الدرجة الثالثة عناصرها تصف بالصورة التالية وتحل بطريقتين:

$$D_3 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

1- طريقة التجزئة:

$$D_3 = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

2- طريقة الاعمدة (الاشعاع) :

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$D_3 = [(a_1 b_2 c_3) + (b_1 c_2 a_3) + (c_1 a_2 b_3)] - [(b_1 a_2 c_3) + (a_1 c_2 b_3) + (c_1 b_2 a_3)]$$

example(1)

1- حل المعادلات من الدرجة الثانية بطريقة المحددات:

$$4X - 3Y = 6 \text{ -----(1)}$$

$$3X - 2Y = 5 \text{ -----(2)}$$

الحل :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4(-2) - (-3)(3) = -8 + 9 = 1$$

$$D_X = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 6(-2) - (-3)5 = -12 + 15 = 3$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - 6(3) = 20 - 18 = 2$$

$$X = \frac{D_X}{D_2} = \frac{3}{1} = 3 \text{ ----- } Y = \frac{D_Y}{D_2} = \frac{2}{1} = 2$$

example(2)

1- أوجد قيمة X في المحدد الثلاثي التالي بطريقة التجزئة :

$$\begin{vmatrix} X^2 & X & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_3 = X^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - X \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_3 = X^2 \{2 - (-3)\} - X(4 - 9) + 1(-12 - 18) = 0 \quad x = -3 \quad \text{or } X = 2$$

example(3)

حل المعادلات من الدرجة الثالث بطريقة المحددات (الاعمدة) :

$$2X + Y - Z = 2 \quad \text{-----1}$$

$$X - Y + Z = 7 \quad \text{-----2}$$

$$X + 2Y + Z = 4 \quad \text{-----3}$$

ملاحظات مهمة:

1- يجب ترتيب المعادلات بحيث تكون عناصرها X ، Y ، Z

2- عند عدم وجود أي عنصر يوضع محله صفر (0)

الحل

$$D3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D3 = 2 * -1 * 1 + 1 * 1 * 1 + (-1) * 1 * 2 - \{1 * 1 * 1 + 2 * 1 * 2 + (-1) * (-1) * 1\} = (-9)$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$DX = 2 * (-1) * 1 + 1 * 1 * 4 + (-1) * 7 * 2 - \{1 * 7 * 1 + 2 * 1 * 2 + (-1) * (-1) * 4\} = (-27)$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$DY = 2 * 7 * 1 + 2 * 1 * 1 + (-1) * 1 * 4 - \{2 * 1 * 1 + 2 * 1 * 4 + (-1) * 7 * 1\} = 12 - 3 = 9$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$DZ = 2*(-1)*4 + 1*7*1 + 2*1*2 - \{1*1*4 + 2*7*2 + 2*(-1)*1\} =$$

$$3 - 30 = (-27)$$

$$\therefore X = \frac{DX}{D_3} = \frac{-27}{-9} = 3$$

$$\therefore Y = \frac{DY}{D_3} = \frac{9}{-9} = -1$$

$$\therefore Z = \frac{-27}{-9} = 3$$

الاختبار الذاتي

1- أوجد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & +1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & +1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = 1*5*1 + 3*(-1)*4 + (-2)*0*6 - \{3*0*1 + 1*(-1)*6 + (-2)*5*4\} =$$

$$5 - 12 - 0 - (0 - 6 - 40) = 39$$

2- أوجد قيمة (x ، y) بطريقة المحددات :

$$3y + 2x = 5 \text{ -----1}$$

$$3x - y = 2 \text{ -----2}$$

خواص المحددات

1- إذا كانت عناصر أي صف أو عمود جميعها أصفارا فإن قيمة المحدد = صفرا .

EX :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \dots, \dots, \dots, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

2- اذا كانت عناصر أي صفين أو عمودين جميعها متساوية أو مضاعفاتهما فان قيمة المحدد = صفرا .

EX :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0, \dots, \dots, \dots, OR \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

3- اذا كانت جميع عناصر المصفوفة = صفرا ، ماعدا العناصر الواقعة على القطر فان قيمة المحدد تساوي حاصل ضرب هذه العناصر .

EX :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 * 4 * 6 = 24$$

4- لا تتغير قيمة المحدد اذا ابدلنا جميع الصفوف بجميع الاعمدة :

EX :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

5- يمكن اخراج كل عامل مشترك بين عناصر صف او عمود بأكمله خارج المحدد .

EX :

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

6- عند تبديل عناصر أي صفين متجاورين أو عمودين متجاورين فإن قيمة المحدد تبقى ثابتة بعد تبديل الإشارة .

EX :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

٥ - الاحتمار البعدي

1- أوجد قيمة المحدد (B + A) وقيمة (A * B) عندما :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \dots, B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = 1 * 3 * 5 = 15$$

$$B = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \dots, \therefore B = 0$$

$$\therefore (A + B) = 15 + 0 = 15$$

$$\therefore (A * B) = 15 * 0 = 0$$