المحددات :-

تعريف المحدد :- مجموعة من العناصر تكتب على شكل صفوف واعمدة بشكل رباعي ، اي ان عدد الصفوف مساوياً لعدد الاعمدة وتكون هذه العناصر محصورة بين مستقيمين شاقوليين .

انواع المحددات :-

1- المحدد الثنائي :

عدد الصفوف = عدد الاعمدة = 2 ويكون بالشكل التالي

الصيغة العامة لمحدد ثنائي $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

مثال عددي على محدد ثنائي $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

2- المحدد الثلاثي :

الصيغة العامة لمحدد ثلاثي

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مثال عددي على المحدد الثلاثي

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

3- المحدد الرباعي :

الصيغة العامة لمحدد رباعي

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

مثال عددي على المحدد الرباعي

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 7 & 12 \\ 11 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

ايجاد قيم المحددات :-

1- المحدد الثنائي : يمكن ايجاد قيمة المحدد الثنائي من

حاصل ضرب عناصر القطر الاول – حاصل ضرب عناصر القطر الثاني

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} * a_{22}) - (a_{12} * a_{21})$$

أمثلة :- جد قيمة المحدد التالي

1- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1 * 4) - (3 * 2) = 4 - 6 = -2$

2- $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (6 * 0) - (2 * 4) = 0 - 8 = -8$

3- $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (2 * 1) - (-1 * -1) = 2 - 1 = 1$

2- المحدد الثلاثي :

يمكن ايجاد قيمة المحدد الثلاثي بواسطة طريقتين :

1- طريقة التوزيع (طريقة المحدد المساعد للعنصر):

قبل البدء في ايجاد قيمة المحدد الثلاثي يجب معرفة المحدد المساعد للعنصر

فمثلاً المحدد الثلاثي التالي :-

المحدد المساعد : هو محدد ثنائي نجده من المحدد الثلاثي بعد حذف الصف والعمود الذي يقع به العنصر .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

بعد اختبار العنصر الذي سيتم ايجاد المحدد المساعد له يجب ان نضع امامه الاشارة اللازمة ويكون اشارات العناصر لمحدد الثلاثي كما يلي :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

عند ايجاد المحدد المساعد للعنصر (3) مثلا هو محدد ثنائي نجد من المحدد الاصلي .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

مثال اخر :-

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ المحدد المساعد للعنصر (5)

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ المحدد المساعد للعنصر (4)

1- طريقة التوزيع (التجزئة) او المحدد المساعد :

نستخدم احد الصفوف او احد الاعمدة ونجد لكل عنصر منهم المحدد المساعد له ثم يضرب به مع اتباع قاعدة الاشارات التي وضحت سابقاً ثم نجد حاصل الجمع ويفضل اختيار الصف او العمود الذي يحوي على عنصر الصفر لكي يسهل الحل .

طريقة الحل بصورة عامة :

فمثلا اذا اختارنا الصف الاول

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22})$$

مثال (1) : اوجد قيمة المحدد الثلاثي التالي (بطريقة التجزئة) :-

اول خطوة بالحل نكتب محدد الاشارات

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ثم نختار الصف الاول لايجاد قيمة المحدد الثلاثي من خلاله

$$D = +2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2[(0*3-((-1)*(-1)] - 2[(-1*3)-(3*(-1))] + 1[(-1)*(-1)-(3*0)]$$

$$= 2[0-1] - 2[-3+3] + 1[1-0] = -2 - 0 + 1 = -1$$

مثال (2) : اوجد حل المثال السابق باستخدام عناصر الصف الثاني :-

اول خطوة بالحل نكتب محدد الاشارات

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$D = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= +1\left[\left(2*3-\left((-1)*1\right)\right)\right] + 0 + 1[(2*(-1)-(3*2)]$$

$$= [6+1] + 0 + [-2-6] = 7 - 8 = -1$$

مثال (3) :

اول خطوة في الحل نكتب محدد الاشارات

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$D = -2\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2[6 * 7 - 2 * 5] + 4[1 * 7 - 2 * 3] - 0[1 * 5 - 6 * 3]$$

$$= -2[42 - 10] + 4[7 * 6] - 0 = -64 + 4 = -60$$

2- الطريقة الثانية لإيجاد قيمة المحدد الثلاثي :-

طريقة اضافة عمودين : نضيف عمودين الاول والثاني الى جانب المحدد ثم نضرب عناصر الاقطار بعضها البعض ونبدأ من الاعلى الى الاسفل ويكون حاصل الضرب موجب ومن ثم من الاسفل الى الاعلى ويكون حاصل الضرب سالب ثم نجد المجموع الجبري لهذه القيم .

مثال (1) : اوجد قيمة المحدد الثلاثي التالي بطريقة اضافة عمودين

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = (1 * 4 * 7) + (2 * 5 * 2) + (3 * 6 * 0) - (2 * 4 * 3) - (0 * 5 * 1) - (7 * 6 * 2) =$$

$$\mathrm{D} = 28 + 20 - 24 - 84 = -60$$

مثال (2):-

$$D=\begin{vmatrix}3 & -4 & 2 & 3 & -4\\ 5 & 2 & -1 & 5 & 2\\ 7 & -3 & 6 & 7 & -3\end{vmatrix}$$

$$D=(3*2*6)+\big((-4)*(-1)*7\big)+\big(2*5*(-3)\big)$$
$$-(7*2*2)-\big((-3)*(-1)*3\big)-\big(6*5*(-4)\big)$$
$$=36+28-30-28-9+120=117$$

مثال (3) :

$$D=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1 & 5 & 2\\ 0 & 4 & 3 & 0 & 4\\ -3 & 1 & 7 & -3 & 1\end{vmatrix}$$

$$D=(5*4*7)+\big(2*3*(-3)\big)+\big((-1)*0*1\big)$$
$$-\big((-3)*4*(-1)\big)-(1*3*5)-(7*0*2)=D$$
$$=140+18+0-12-15-0=+95$$

المحدد الرباعي :-

يمكن ايجاد قيمة المحدد الرباعي بطريقة التجزئة وذلك بتحويله الى محددات ثلاثية واعتماداً على قانون الاشارات الخاص بها حيث نأخذ عناصر صف او عمود وبمساعدة المحدد المساعد للعنصر نجد قيمة المحدد الرباعي .

مثال :- اوجد قيمة المحدد الرباعي الاتي :-

اول خطوة بالحل نكتب محدد الاشارات

$$\begin{vmatrix}+ & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2 & 4\\ 2 & 0 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 6\\ -2 & 3 & -2 & 3\end{vmatrix}$$

حيث يجب ملاحظة ان الاشارة التي ينتهي السطر بها يبدأ بها السطر الذي يليه ولذلك يجب الانتباه لهذا التغيير ... وايضاً يبتدأ محددة الاشارات للمحدد الرباعي بالموجب و ينتهي بالموجب حاله حال محددة الاشارات للمحدد الثلاثي .

نختار مثلاً عناصر الصف الثاني :-

$$D=-2\begin{vmatrix}1&-2&4\\-1&2&6\\3&-2&3\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}3&-2&4\\1&2&6\\-2&-2&3\end{vmatrix}-(-5)\begin{vmatrix}3&1&4\\1&-1&6\\-2&3&3\end{vmatrix}$$
$$+1\begin{vmatrix}3&1&-2\\1&-1&2\\-2&3&-2\end{vmatrix}$$

نوجد قيم كلاً من D1,D2,D3 ونعود فنعوض عنها بالمعادلة D

$$D1=\begin{vmatrix}1&-2&4\\-1&2&6\\3&-2&3\end{vmatrix}\begin{matrix}1&-2\\-1&2\\3&-2\end{matrix}$$

=6-36+8-24+12-6=-40

$$D2=\begin{vmatrix}3&1&4\\1&-1&6\\-2&3&3\end{vmatrix}\begin{matrix}3&1\\1&-1\\-2&3\end{matrix}$$

= -9-12+12-8-54-3= -74

$$D3=\begin{vmatrix}3&1&-2\\1&-1&2\\-2&3&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}3&1\\1&-1\\-2&3\end{matrix}$$

= 6-4-6+4-18+2=-16

$$D = -2(D1) + 0 + 5(D2) + 1(D3)$$
$$= -2(-40) + 5(-74) + 1(-16) = 80 - 370 - 16$$
$$= -306$$

تمارين :-

1- اوجد قيم المحددات التالية : بطريقتي التوزيع والمحدد المساعد ..

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ $Ans = -7$

2) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ $Ans = 0$

3) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $Ans = -3$

2- اوجد قيمة المحدد الرباعي التالي :

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

حل المعادلات الأنية بطريقة المحددات (كرامير)

1)- معادلات أنية تحل بواسطة محدد ثنائي :-

$a_1x + b_2y = k1$ ……..(1)

$a2x + b2y = k2$ ……..(2)

طريقة الحل :-

1- نوجد قيمة محدد المعاملات ل X,Y .

$$D = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}$$

2- بعد ابدال قيم ما بعد المساواة بمعاملات X بالمعادلات (1) و (2) نحصل على DX وبعد ايجاد قيمة ال DX نحصل على X بواسطة .

$$D_x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad x = \frac{D_X}{D}$$

3- بعد ابدال قيم ما بعد المساواة بمعاملات Yبالمعادلات (1) و (2) نحصل على Dy وبعد ايجاد قيمة ال DY نحصل على Y بواسطة .

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

2)- اما اذا كانت ثلاثة معادلات أنية بدلاً من اثنين فيكون الحل بالشكل التالي :-

$$a_1\, x + b_1 y + c_1 z = k1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k2 \quad \dots\dots\dots . (2)$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k3 \quad \dots\dots\dots . . (3)$$

لايجاد قيم المجاهيل الثلاثة X,Y,Z نستخدم المحددات وتسمى هذه الطريقة طريقة كراميير .

1- نوجد قيمة المحدد D الذي يتكون من المعاملات للمتغيرات الثلاثة X,Y,Z .

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & z_2 \\ a_3 & b_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2- ابدال العمود الاول (معاملات X) بالحد المطلق (متمثلة بقيم K) حيث نحصل على Dx وبعد ايجاد قيمة ال Dx يمكن ان نحصل على قيمة X بواسطة

$$Dx = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & z_1 \\ k_2 & b_2 & z_2 \\ k_3 & b_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad X = \frac{D_x}{D}$$

3- ابدال العمود الثاني (معاملات Y) بالحد المطلق (متمثلة بقيم K) حيث نحصل على Dy وبعد ايجاد قيمة ال Dy يمكن ان نحصل على قيمة Y بواسطة

$$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & z_1 \\ a_2 & k_2 & z_2 \\ a_3 & k_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad Y = \frac{D_y}{D}$$

4- ابدال العمود الثالث (معاملات Z) بالحد المطلق (متمثلة بقيم K) حيث نحصل على Dz وبعد ايجاد قيمة ال Dz يمكن ان نحصل على قيمة z بواسطة

$$Dz = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} \qquad Z = \frac{D_z}{D}$$

مثال (1) :اوجد الحل للمعادلات الأنية التالية بطريقة (كرامير)

$2X - 3Y = 7 \quad \dots\dots\dots (1)$

$3X + 5Y = 1 \quad \dots\dots\dots . (2)$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2 * 5) - (3 * -3) = 10 + 9 = 19$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (7 * 5) - (1 * -3) = 35 + 3 = 38$$

$$\mathrm{Dy} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2 * 1) - (3 * 7) = (2 - 21) = -19$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{38}{19} = 2 \qquad , \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-19}{19} = -1$$

التحقق نعوض بالمعادلات عن قيم X ,Y لكي نثبت صحة المعادلتين :

$2(2) - 3(-1) = 4 + 3 = 7 \qquad (1)$

$3(2) + 5(-1) = 6 - 5 = 1 \qquad (2)$

مثال (2) : اوجد الحل للمعادلات الأنية التالية بطريقة كرامير :-

$2X + Y - Z = 0 \qquad \ldots\ldots(1)$

$X - Y + Z = 6 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$

$X + 2Y + Z = 3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -2 + 1 - 2 - 1 - 4 - 1 = -9$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 0 + 3 - 12 - 3 - 0 - 6 = -18$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 12 + 0 - 3 + 6 - 6 - 0 = 9$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -6 + 6 + 0 - 0 - 24 - 3 = -27$$

$$X = \frac{D_x}{D} = \frac{-18}{-9} = 2 \quad , Y = \frac{D_y}{D} = \frac{9}{-9} = -1 \, , Z = \frac{D_Z}{D} = \frac{-27}{-9} = 3$$

مثال (3): اوجد الحل للمعادلات الانية التالية بواسطة المحددات (كرامير):-

$3Y + 2X + 2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

$5Y - 2Z = 4 \quad \ldots\ldots (2)$

$4X + 7 = -3Z \quad \ldots\ldots\ldots (3)$

اولاً :نرتب المعادلات بحيث يكون X العمود الاول Y العمود الثاني و z العمود الثالث والحد المطلق بالطرف الاخر ما بعد المساواة وفي حالة عدم وجود المتغير نضع بدلاً عنه (0).

$2X + 3Y + 0 = -2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

$0 + 5Y - 2Z = 4 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

$4X + 0 + 3Z = -7 \quad \ldots\ldots (3)$

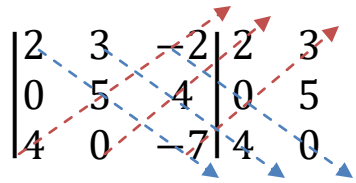
اي ان محدد المعاملات سيكون بالصورة التالية :-

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{matrix} = 30 - 24 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6$$

$$Dx = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \\ -7 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 0 \end{matrix} = -30 + 42 + 0 - 0 - 0 - 36 = -24$$

$$\mathrm{Dy} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 4 & -7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \\ 4 & -7 \end{matrix} = 24 + 16 - 28 = 12$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{matrix} = -70 + 48 + 40 = 18$$



$$X = \frac{Dx}{D} = \frac{-24}{6} = -4$$

$$Y = \frac{Dy}{D} = \frac{12}{6} = 2$$

$$Z = \frac{Dz}{D} = \frac{18}{6} = 3$$

التفاضل :- (Differentiation)

او ما يسمى بالمشتقة : لنأخذ اولاً تعريف الدالة وبعد ذلك نتناول قوانين الاشتقاق

تعريف الدالة :- عبارة عن علاقة رياضية تعبر عن تغير متغير معين تبعاً لتغير متغير آخر ويعبر عنها بالصيغة التالية

$y = f(x)$ تربط المتغيرين (X,Y) حيث يسمى المتغير X بالمتغير المستقل والمتغير y بالمتغير غير المستقل (المعتمد) فاذا علمت قيمة X يمكن معرفة y اي ان لكل قيمة ل X هناك قيمة واحدة ل y فمثلاً

$Y = x^2$

$X = 1 \quad \rightarrow Y = (1)^2 = 1$

$X = 2 \quad \rightarrow Y = (2)^2 = 4$

$X = 3 \quad \rightarrow Y = (3)^2 = 9$

وهكذا

قوانين المشتقات :-

1)- مشتقة الثابت C=0 تساوي صفر

Y=C

$\frac{dy}{dx} = 0$

OR $Y' = 0$

2)- مشتقة X=1

اي مشتقة المتغير X المرفوع للاس واحد تساوي واحد

$Y = X$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

OR $Y' = 1$

3)- مشتقة X مرفوع الى أس

$$Y = X^n$$

يكون المشتقة له بالصورة التالية

اي انه يكتب الاس بالبداية مضروباً في X مرفوع الى أس اقل منه بواحد

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = n\, X^{n-1}$$

مثال :- أوجد مشتقة الدالة التالية

$$y = X^3$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = y' = 3X^2$$

مشتقة دالة مثل " U " قابلة للاشتقاق u=f(x)

اي ان

$$Y = U \quad \rightarrow Y' = \frac{du}{dx}$$

4)- مشتقة حاصل ضرب U,C = الثابت *مشتقة الدالة

اي ان

$$Y = CU$$

$$\frac{dy}{dx} = Y' = \frac{d(cu)}{dx} = C * \frac{du}{dx}$$

مثال :

$$Y = 3X \quad \rightarrow Y' = 3 * 1 = 3$$

$$Y = 7X^4 \rightarrow Y' = 7 * 4X^3 = 28X^3$$

5)- مشتقة مجموع عدد محدد من الدوال يساوي مجموع مشتقاتها .

$$U = F(X) \qquad , \qquad V = F(X)$$

$$Y = U + V$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

مثال :-

$$y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$$

ان تفاضل او مشتقة الدالة اعلاه

$$y' = 3x^2 + 14x - 5 + 0$$

6)- مشتقة قوس مرفوع الى اس يساوي حاصل ضرب أس القوس في القوس نفسه بعد طرح من أسه العدد (1) في مشتقة داخل القوس .

مثال :-

$$y = (x^2 - 4)^3$$

$$y' = 3(x^2 - 4)^2 * (2x - 0) = 6x(x^2 - 4)^2$$

7)- مشتقة حاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق =

الاولى * مشتقة الثانية + الثانية * مشتقة الاولى

$$Y = U.V$$

$$\frac{dy}{dx} = U.\frac{dv}{dx} + V.\frac{du}{dx}$$

مثال :

$$y = (x^2 + 1)(x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = (x^2 + 1)2x + x^2(2x + 0) = 2x(x^2 + 1) + 2x^3$$

8)- مشتقة خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام *مشتقة البسط –البسط *مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{V * \frac{du}{dx} - U * \frac{dv}{dx}}{V^2}$$

مثال :

$$Y = \frac{x^2}{(2X - 1)}$$

$$Y' = \frac{(2X - 1)2X - x^2(2 - 0)}{(2X - 1)^2} = \frac{2X(2X - 1) - 2x^2}{(2X - 1)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 2X - 2x^2}{(2X - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2X}{(2X - 1)^2}$$

امثلة عامة على المشتقة :-

مثال (1) :

$$Y = 7X^4 - 8X^{-7} + 3x^2 + 10$$

$$Y' = 7 * 4X^3 - 8(-7)X^{-8} + 3(2)X + 0 = 28X^3 + 56X^{-8} + 6X$$

مثال (2):

اول خطوة سوف احول الجذر الى اس كسري

$$Y = X^{5/2} - 3X^{-3/2} + \sqrt{X}$$

$$Y' = \frac{5}{2}X^{3/2} - 3\left(\frac{-3}{2}\right)X^{-5/2} + \frac{1}{2}X^{-1/2}$$

$$= \frac{5}{2}X^{3/2} + \frac{9}{2}X^{-5/2} + \frac{1}{2}X^{-1/2} = \frac{5}{2}\sqrt{X^3} + \frac{9}{2\sqrt{X^5}} + \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

ملاحظة :-

1- الاس الكسري عندما نطرح منه واحد نطبق القانون (البسط –المقام)/المقام ،مثل ماوضحنا اعلاه

2- اذا كتبنا المتغير الذي رفع الى اس كسري فانه يكتب بشكل جذر على ان يكون المقام دليل الجذر والبسط اس للمتغير .

مثال (3) :

$$Y = \sqrt[4]{4X^{-5} + 9X^3 - 7X^{-3}}$$

$$Y = (4X^{-5} + 9X^3 - 7X^{-3})^{\frac{1}{4}}$$

$$Y' = \frac{1}{4}(4X^{-5} + 9X^3 - 7X^{-3})^{\frac{-3}{4}}(-20X^{-60} + 27x^2 + 21X^{-4})$$

مثال (4) :

$$Y = \frac{x^2 - 4}{X - 2}$$

$$Y' = \frac{(X-2)(2X-0) - (x^2-4)(1-0)}{(X-2)^2} = \frac{2x^2 - 4X - x^2 + 4}{(X-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4X + 4}{x^2 - 4X + 4} = 1$$

مثال (5):

جد المشتقة الثانية للدالة التالية :

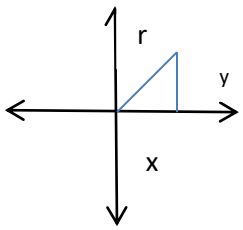
$$Y = \frac{X^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x^2 + 4$$

$$Y' = \frac{3}{3}x^2 - \frac{2}{2}X + 14X + 0 \rightarrow Y' = \mathrm{x}^2 - X + 14X$$

$$Y'' = 2X + 13$$

$$Y''' = 2 + 0 = 2$$

مشتقة الدوال المثلثية :-



النسب المثلثية :

$\sin\theta\ , \cos\theta, \tan\theta, \csc\theta, \sec\theta, \cot\theta$

وان كلاً من $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ، $\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

قوانين المشتقة للدوال المثلثية :

u تمثل دالة للمتغير x
اي انها تعتمد على المتغير x
وهنا تمثل الزاوية .

1) $\sin u = \cos u \,.\frac{du}{dx}$

2) $\cos u = -\sin u \,.\frac{du}{dx}$

3) $\tan u = sec^2\, u.\frac{du}{dx}$

4) $\cot u = -csc^2 u.\frac{du}{dx}$

5) $\sec u = \sec u.\tan u.\frac{du}{dx}$

6) $\csc u = -cscu.\cot u.\frac{du}{dx}$

أمثلة :-

اوجد مشتقة الدوال التالية :

مثال (1)

$$y = 5\cos\frac{x}{4} + \sin(3x^2 + 5)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 5(-\sin\frac{x}{4}\,.\frac{1}{4}) + \cos(3x^2 + 5)(6x + 0)$$

$$= \frac{-5}{4} sin\frac{x}{4} + 6x\, cos(3x^2 + 5)$$

مثال (2)

$$y = \sqrt{\tan x} + \mathrm{x}^2.\sin x$$

نحول الجذر الى اس كسري

$$y = (tan)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{x}^2 . \sin x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\tan x)^{\frac{-1}{2}} sec^2 x \,.1 + x^2 . \cos x + \sin x \; 2x$$

$$= \frac{sec^2 \, x}{2\sqrt{\tan x}} + x^2 \cos x + 2x \sin x$$

ملاحظة : عند وضع الدالة التي تحمل اس سالب بالمقام فانها تفقد اشارتها السالبة

مثال (3)

$$y = 7x \, . \tan 3x^2 + 5csc \frac{x}{2}$$

عندما نرى انه حاصل ضرب دالتين نعتمد الى تطبيق مشتقة حاصل ضرب دالتيين

$$y' = \frac{dy}{dx} = 7x . sec^2 3x^2 (6x) + \tan 3x^2 (7) + 5 \left(-csc \frac{x}{2} cot \frac{x}{2}\right) . \frac{1}{2}$$

$$= 42 \, \mathrm{x}^2 sec^2 3x^2 + 7 \tan 3x^2 - \frac{5}{2} csc \frac{x}{2} cot \frac{x}{2}$$

مثال (4)

$$y = \cos \sqrt[3]{x} + x^2 \, sin^2 3x$$

$$y = (cos\sqrt{x})^3 + x^2 (sin3x)^2$$

$$\mathrm{y'} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 3(\cos \mathrm{x}^{\frac{1}{2}})^2 . \left(-\sin \mathrm{x}^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2} \mathrm{x}^{\frac{-1}{2}}\right) + \mathrm{x}^2 * 2(\sin 3\mathrm{x})(\cos 3\mathrm{x}).3 + (\sin 3\mathrm{x})^2 2\mathrm{x}$$

مثال (5)

$$y = tan^4 (x^3 + 2x + 5) = (\tan(x^3 + 2x + 5))^4$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4(\tan(x^3 + 2x + 5))^3 \, sec^2(x^3 + 2x + 5)(3x^2 + 2)$$

مثال (6):-

$$y = \frac{1}{3} sec^3 7x + cot^3 x^{\frac{3}{2}}$$

$$y = \frac{1}{3} \, (sec 7x)^3 + (\cot x^{\frac{3}{2}})^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} . 3(sec 7x)^2 \, . \sec 7x \tan 7x \, . 7$$

$$+ 3(cot 7x^{\frac{3}{2}})^2 \, (-csc^2 \, x^{\frac{3}{2}} \, . \frac{3}{2} \, x^{\frac{1}{2}})$$

$$= 7 \, sec^3 \, 7x \tan 7x - \frac{9}{2} \, x^{\frac{1}{2}} \, cot^2 x^{\frac{3}{2}} \, . csc^2 \, x^{\frac{3}{2}}$$

مثال (7):-

حسب العلاقات التي ذكرت في بداية الموضوع (مشتقة الدوال المثلثية)

$$y = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{cosx} \rightarrow secx - tanx$$

$$y' = secx \, tanx - sec^2 \, x \, .1$$

طريقة ثانية للحل نعتمد توحيد المقامات وباستخدام
قانون مشتقة قسمة الدوال

$$y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\cos x\,(0-\cos x)-(1-\sin x\,)\,(-\sin x)}{cos^2 x}$$

$$y' = \frac{-cos^2 x + \sin x - sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{-(cos^2 x + sin^2 x) + \sin x}{cos^2 x} \qquad (\sin^2 x+\cos^2 x)=1$$

$$= \frac{-1+\sin x}{cos^2 x} = \frac{-1}{cos^2 x} + \frac{\sin x}{cos^2\, x}$$

$$= sec^2 x + \frac{1}{\cos x}\,.\frac{\sin x}{\cos x} = sec^2 x + \sec x.\tan x$$

مثال أخر :-

$$y = tanx\,.\cos x$$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}.\cos x = \sin x$$

$$y' = \cos x * 1 = \cos x$$

او يمكن ان يحل بطريقة حاصل ضرب دالتين :

$$y = \tan x \cos x$$

$$y' = tanx\,(-\sin x * 1) + \cos\,(sec^2\, x * 1)$$

$$y' = -\sin x \tan x + \cos x sec^2 x$$

$$y' = -\sin x \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x \frac{1}{cos^2 x} \qquad \because sin^2 \mathrm{x} + cos^2 \mathrm{x} = 1$$

$$\therefore 1 - sin^2 x = cos^2 x$$

$$y' = -\frac{sin^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{-sin^2 x + 1}{\cos x} = \frac{cos^2 x}{\cos x} = \cos x$$

مشتقة الدوال اللوغارتمية :-

حيث ان u دالة تعتمد على x او دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x

$$y = \ln u$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{u} * \frac{du}{dx}$$

فمثلاً :

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x} * 1 = \frac{1}{x}$$

أمثلة : أوجد مشتقة الدوال التالية :-

مثال (1):-

$$y = \ln(3x^2 + 5x)$$

$$y' = \frac{1}{(3x^2 + 5x)} * (6x + 5)$$

مشتقة الدالة اللوغارتمية = $\frac{\mathbf{1}}{\text{الدالة}}$ * **مشتقة الدالة**

مثال (2) :-

$$y = \ln(\sin(5x + 4))$$

$$y' = \frac{1}{\sin(5x + 4)} * \cos(5x + 4)(5 + 0)$$

$$= \frac{5\cos(5x + 4)}{\sin(5x + 4)} = 5\cot(5x + 4)$$

مثال (3) :-

$$y = \ln(\tan x + \sec x)$$

$$y' = \frac{1}{(\tan x + \sec x)} * sec^2 x * 1 + \sec x \tan x * 1$$

$$y' = \frac{sec^2 x + \sec x tan\, x}{\tan x + \sec x} = \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\tan x + \sec x)} = \sec x$$

مثال (4):-

$$y = [\ln(7x^{-3} + 8)]^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = \frac{3}{2}[\ln(7x^{-3} + 8)]^{\frac{1}{2}} * \frac{1}{(7x^{-3} + 8)} * (-21x^{-4} + 0)$$

$$= \frac{-63\, x^{-4}[\ln(7x^{-3} + 8)]^{\frac{1}{2}}}{(7x^{-3} + 8)}$$

مثال (5):-

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

$$y' = \frac{x.\frac{1}{x}.1 - \ln x.1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

مشتقة الدوال الأسية :-

الدالة الاسية : هي معكوس اللوغاريتم الطبيعي (ln) فاذا كانت لدينا الدالة

X=ln Y فان معكوس هذه الدالة يسمى دالة اسية اي ان :

$y = e^x$ مع الاخذ بنظر الاعتبار ان $e^{\ln x} = x$ وكذلك $\ln(e^x) = x$

اي ان يمكن ان تكون مشتقة الدالة الاسية كما يلي :-

(u : دالة تعتمد على x)

$$y = e^u$$

$$y' = e^u * \frac{du}{dx}$$

مثال :-

$$y = e^x$$

$$y' = e^x * 1 = e^x$$

امثلة : اوجد المشتقة للدوال التالية :-

مثال (1):-

$$y = e^{-x} + e^{3x} - e^{lnx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-x}(-1) + e^{3x}(3) - e^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -e^{-x} + 3e^{3x} - \frac{e^{\ln x}}{x}$$

مثال (2):-

$$y = e^{tan^3(x+2)} = e^{(\tan(x+2))^3}$$

$$y' = e^{(\tan(x+2))^3} * 3(\tan(x+2))^2 * \left(sec^2(x+2) * (1+0)\right)$$

$$= 3e^{tan^3(x+2)} tan^2(x+2) sec^2(x+2)$$

مثال (3):-

$$y = \sqrt{e^{4x} + 1} + e^{x^2+x}$$

$$y = (e^{4x} + 1)^{\frac{1}{2}} + e^{x^2+x}$$

$$y' = \frac{1}{2}(e^{4x+1})^{\frac{-1}{2}}(e^{4x} * 4 + 0) + e^{x^2+x} * (2x + 1)$$

$$= \frac{4\, e^{4x}}{2\sqrt{e^{4x} + 1}} + (2x + 1)e^{x^2+x}$$

مثال (4):-

$$y = e^{3x}.\sin 2x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{3x} * (\cos 2x) * 2 + \sin 2x\, e^{3x}.3$$

$$= 2\, e^{3x} \cos 2x + 3\, e^{3x} \sin 2x$$

مشتقة الدوال الضمنية :-

ان معظم الدوال التي وردت فيما سبق كانت بالصيغة التالية :

$$y = f(x)$$

$$y = 3x - 2$$

$$y = x^2 + 5x$$

نلاحظ ان المتغير y في جهه والمتغير x في جهه

لكن في حالة وجود المتغيرين X,Y في نفس الجهة معاً يكون الاشتقاق يختلف عن ما سبق من الاشتقاق وهذا مايسمى بالاشتقاق الضمني حيث تكون صيغة الدالة بالصورة التالية :

$$x^3 + y^3 + x^3y = x + 5 \quad \boldsymbol{OR} \quad 4xy - 4x = 6$$

حيث من الممكن التعبير عنها بالصورة ´y او $\frac{dy}{dx}$

$$4xy - 4x = 6$$

$$4xy = 6 + 4x \quad \rightarrow y = \frac{6 + 4x}{4x}$$

الان يمكن اجراء الاشتقاق وحسب القوانين الاشتقاق العادية ,حيث تمثل مشتقة القسمة .

أمثلة :-

مثال (1) :

$$xy + x - 2y - 1 = 0$$

$$x.y' + y.1 + 1 - 2y' - 0 = 0$$

نضع الحدود التي فيها ´y بالطرف الايسر من المعادلة وتنقل الحدود المتبقية الى الطرف الايمن من المعادلة (بعد المساواة)

$$x.y' - 2y' = -1 - y$$

$$y'(x - 2) = -1 - y \quad \rightarrow y' = \frac{-1 - y}{(x - 2)}$$

مثال (2):

$$x^3 + y^3 + x^3y = x + 5$$

$$3x^2 + 3y^2.y' + x^3.y' + y.3x^2 = 1 + 0$$

نضع الحدود التي فيها ´y بالطرف الايسر من المعادلة وتنقل الحدود المتبقية للطرف الايمن منها (مابعد المساواة)

$$3y^2.y' + x^3y' = 1 - 3x^2 - 3x^2y$$

$$y'(3y^2 + x^3) = 1 - 3x^2 - 3x^2y$$

$$y' = \frac{1 - 3x^2 - 3x^2y}{(3y^2 + x^3)}$$

مثال (3):

$$2y = x^2 + \sin y$$

$$2y' = 2x + \cos y * y'$$

نضع الحدود التي فيها ´y بالطرف الايسر من المعادلة وتنقل الحدود المتبقية للطرف الايمن منها (مابعد المساواة)

$$2y' - \cos y * y' = 2x$$

$$y'(2 - \cos y) = 2x \ \rightarrow y' = \frac{2x}{(2 - \cos y)}$$

<u>مشتقة الدوال المركبة (قاعدة السلسلة):-</u>

اذا كانت

$$y = f(u) \quad , u = f(x)$$

$$\frac{dy}{du} \quad , \quad \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'$$

أمثلة :- اوجد مشتقة الدوال التالية :-

مثال (1):

$$y = (u+3)^2 \quad , \quad u = 3x^2 + 4$$

١- نوجد $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{du} = 2(u+3) \quad , \quad \frac{du}{dx} = 6x$$

٢- نعوض عن u بما تساوي حيث $u=3x^2+4$

$$\frac{dy}{du} = 2[(3x^2+4)+3]$$

$$\frac{dy}{du} = 2[3x^2+7]$$

٣- نعوض بقانون قاعدة السلسلة .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

اي ان

$$\frac{dy}{dx} = 2[3x^2+7] * 6x = 12x[3x^2+7]$$

مثال (2):

$y = u^2 + 3 \quad , \qquad u = 2x + 1$

$\frac{dy}{du} = 2u = 2(2x + 1) \ , \qquad \frac{du}{dx} = 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2(2x + 1) * 2 = 4(2x + 1)$

مثال (3):

$y = \sqrt{u^2 + 1} \qquad , \qquad u = \frac{1}{x + 1}$

$y = (u^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{(x+1)*0-1*(1+0)}{(x+1)^2}$

$\frac{dy}{du} = y' = \frac{1}{2}(u^2 + 1)^{\frac{-1}{2}} * 2u \qquad \frac{du}{dx} = \frac{-1}{(x + 1)^2}$

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{(x + 1)}(\frac{1}{(x + 1)^2} + 1)^{\frac{-1}{2}}$

نعوض بقانون السلسلة

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{1}{(x + 1)}(\frac{1}{(x + 1)^2} + 1)^{\frac{-1}{2}} * \frac{-1}{(x + 1)^2}$

تطبيقات على المشتقة (التفاضل):-

اذا كانت العلاقة $s = f(t)$ تعطي موضع جسم متحرك من اللحظة (t) حيث (s) تمثل المسافة فتكون سرعة الجسم والذي يرمز لها (V) تمثل المشتقة الاولى للمسافة بالنسبة للزمن $\frac{ds}{dt}$. اما التعجيل الجسم الذي يرمز له (a) فيمثل المشتقة الثانية للمسافة بالنسبة للزمن او المشتقة الاولى للسرعة بالنسبة للزمن $\frac{2ds}{dt^2}$ او $\frac{dV}{dt}$.

وتقاس كلاً من المسافة والسرعة والتعجيل بالوحدات التالية :

حيث يمثل المتر (m) تقاس المسافة (s)

متر لكل ثانية (m/sec) تقاس السرعة (V)

متر لكل (ثانية) ٢ (m/sec^2) تقاس التعجيل (a)

علما بان

$$s = f(t)$$

$$V = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt} \quad \text{أو} \quad \frac{dV}{dt}$$

الامثلة :-

مثال (1) :

أوجد السرعة الخطية (V) لجسم ساقط بعد (4sec) اذا كانت معادلة الحركة $s = \frac{1}{2}gt^2$ حيث ان s تمثل المسافة ب (m) و (t) تمثل الزمن بالثانية ، g هو التعجيل الارضي الذي يمكن تمثيله بالمعادلة التالية $g= 9.8\ m/sec^2$

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\ g * 2t = gt$$

بالسؤال ذكر ان t=4 sec ، ونعوض عن g بما يساويه

$$V = g * t = 9.8 * 4 = 39.2 \frac{m}{sec}$$

مثال (2):

جسم يتحرك في خط منحني حسب العلاقة $s = t^3 - 4t^2 - 3t$ اوجد تعجيل الجسم في اللحظة التي يصبح فيها سرعة الجسم تساوي صفراً .

$$s = t^3 - 4t^2 - 3t$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 8t - 3$$

سوف نساوي السرعة بالصفر وحسب ما طلب بالسؤال

$$0 = 3t^2 - 8t - 3$$

$$0 = (3t + 1)(t - 3)$$

$(t - 3) = 0 \ \rightarrow t = 3sec$ الزمن الذي تصبح به السرعة مساويا للصفر

$(3t + 1) = 0 \ \rightarrow 3t = -1 \ \rightarrow t = \frac{-1}{3}$ يهمل لانه لايوجد زمن سالب

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 8 = 6 * (3) - 8 = 18 - 8 = 10\ m/sec^2$$

مثال (3) :

اذا علمت ان المسافة (s) التي يقطعها جسم في زمن (t) ثانية تمثل بالعلاقة التالية

$s = 18t - 16t^2$ بعد كم ثانية تصبح سرعة الجسم صفر ثم اوجد تعجيل الجسم .

$$s = 18t - 16t^2$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 18 - 32t$$

$$0 = 18 - 32t$$

$$\therefore\ 32t = 18\ \rightarrow t = \frac{18}{32} = 0.56\ sec$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -32\ m/sec^2$$

<u>رسم المنحني :-</u>

لرسم المنحني نتبع الخطوات التالية :

1- نجد المشتقة الاولى ونساويها بالصفر ومنها نجد قيم x

2- نجد المشتقة الثانية ونعوض عن قيم x التي وجدنا من الخطوة الاولى فاذا كانت المشتقة الثانية عند قيم x موجبة عندها تكون نهاية صغرى واذا كانت المشتقة الثانية عند قيم x سالبة عندها تكون نهاية عظمى .

اي ان $y''>0$ نهاية صغرى

اي ان $y''<0$ نهاية عظمى

3- لايجاد نقطة الانقلاب نساوي y'' بالصفر ونجد قيمة x

4- نجد مناطق الصعود والنزول وكما يلي :-

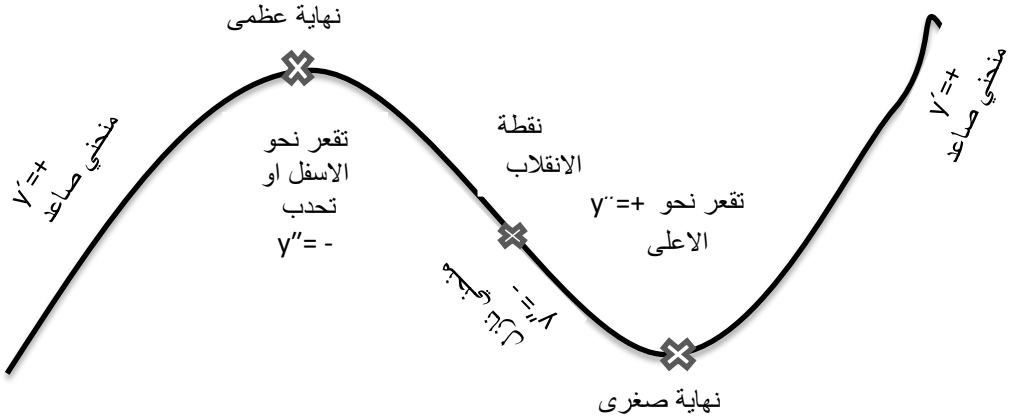
أ- اذا كانت قيمة ´y موجبة ويكون المنحني صاعد

ب- اذا كانت قيمة ´y سالبة يكون المنحني نازل

ج- اذا كانت قيمة ″y موجبة يكون المنحني محدب نحو الاعلى .

د- اذا كانت قيمة ″y سالبة يكون المنحني مقعر نحو الاسفل .

يمكن توضيح ماسبق بالرسم التالي :



الامثلة :-

مثال(1) :- ارسم منحني الدالة التالية :

$$y = x^2 - 4x + 3$$

مبيناً النهايات العظمى والصغرى ونقطة الانقلاب ان وجدت :

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$y' = 2x - 4$$

$$0 = 2x - 4 \ \rightarrow 2x = 4 \ \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

لاجل الحصول على قيمة y المقابلة ل x اعلاه نعوض بالمعادلة الرئيسية للدالة

$$y = (2)^2 - 4(2) + 3$$

$$y = 4 - 8 + 3 = -1$$

اي ان النقطة (2,-1)

نوجد المشتقة الاولى ل $y = x^2 - 4x + 3$

$$y' = 2x - 4$$

نوجد المشتقة الثانية $y'' = 2 > 0$

اذن النقطة (2,-1) نهاية صغرى

لاتوجد نقطة انقلاب في دالة المنحني اعلاه لان المشتقة الثانية y″=2 لاتحوي على المتغير x حيث كان من الممكن التعويض بها ومعرفة من قيمتها نقطة الانقلاب .

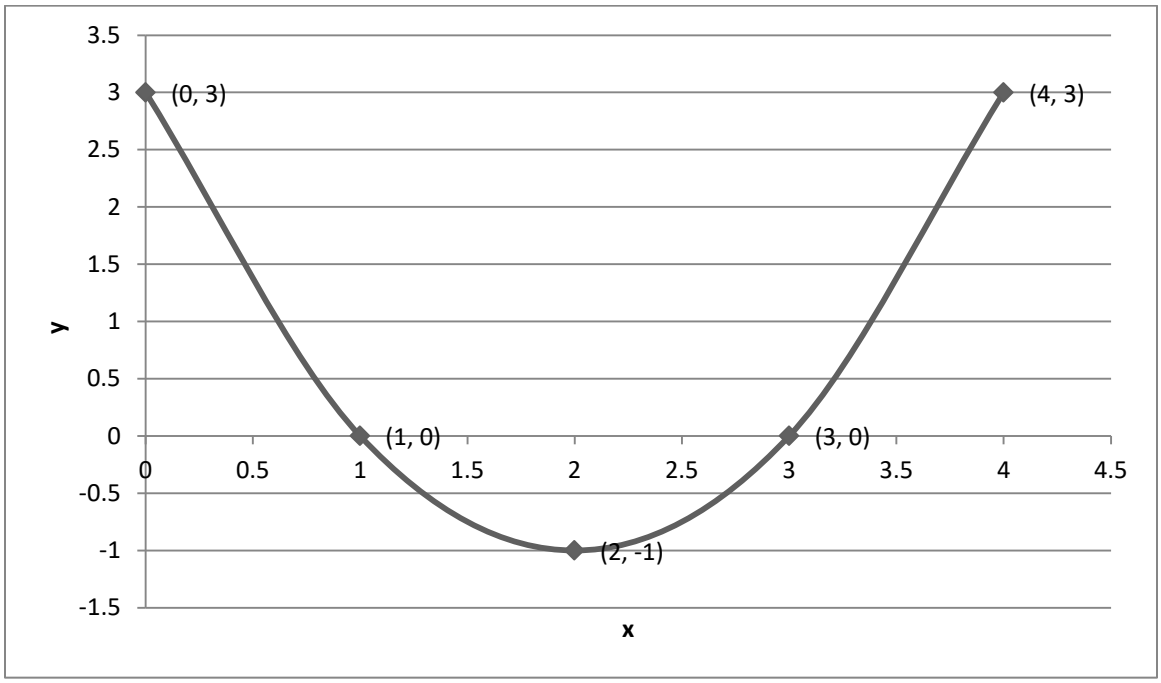
لاجل رسم المنحني سوف ناخذ قيم ال x ونوجد قيم y التي تقابلها .. كما سنوجد قيم y´ المقابلة لهما وكما في الجدول التالي :

x	$Y=x^2-4x+3$	$y'=2x-4$
0	$Y=0^2-4*0+3=3$	y´=2*0-4=-4
1	$Y=1^2-4*1+3=0$	y´=2*1-4=-2
2	$Y=2^2-4*2+3=-1$	y´=2*2-4=0
3	$Y=3^2-4*3+3=0$	y´=2*3-4=2
4	$Y=4^2-4*4+3=3$	y´=2*4-4=+4

علماً بان y″>0 في تزايد مستمر

النقاط (0,3) (1,0) (2,-1) (3,0) (4,3)

ويمكن رسم المنحني كما يلي :-



مثال (2):- ارسم منحني الدالة التالية :-

$$y = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)$$

مبيناً عليها النهايات العظمى والصغرى ونقطة الانقلاب ان وجدت

$$y = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)$$

$$y' = \frac{1}{6}(3x^2 - 12x + 9 + 0)$$

$$y' = \frac{1}{6}3x^2 - \frac{1}{6}6 * 2x + \frac{1}{6}.9 + \frac{1}{6} * 0 = \frac{1}{2} - 2x + \frac{3}{2}$$

نساوي ´y بالصفر

$$0 = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$$

للتخلص من الكسر نضرب ب 2

$$0 = x^2 - 4x + 3$$

$$0 = (x-1)(x-3)$$

أما $$x - 1 = 0 \ \rightarrow x = 1$$

او $$x - 3 = 0 \ \rightarrow x = 3$$

نجد قيم y المقابلة لهذه النقاط

$$x = 1 \ \rightarrow y = \frac{1}{6}(1 - 6.(1)^2 + 9 * 1 + 6) = \frac{5}{3}$$

اذن النقطة (1,5/3)

$$x = 3 \ \rightarrow y = \frac{1}{6}(3^3 - 6.(3)^2 + 9 * 3 + 6) = 1$$

اذن النقطة (3,1)

نختبر النقاط التي وجدناها فيما اذا كانت نهاية عظمى او صغرى حيث نعوض ب (y″)فاذا كانت y″ موجبة فالنقطة نهاية صغرى واذا كانت سالبة فالنقطة نهاية عظمى .

$$y' = \frac{1}{6}(3x^2 - 12x + 9)$$

$$y'' = \frac{1}{6}(6x - 12) = \frac{1}{6}.6x - \frac{12}{6} = x - 2$$

اعوض عن قيم x في النقطتين اعلاه بالمشتقة الثانية

اي عندما

$x = 1 \quad y'' = 1 - 2 = -1$ نهاية عظمى

$x = 3 \quad y'' = 3 - 2 = +1$ نهاية صغرى

ولا يجاد نقطة الانقلاب سوف تساوي y'' بالصفر

$$y'' = x - 2$$

$$0 = x - 2 \rightarrow x = 2$$

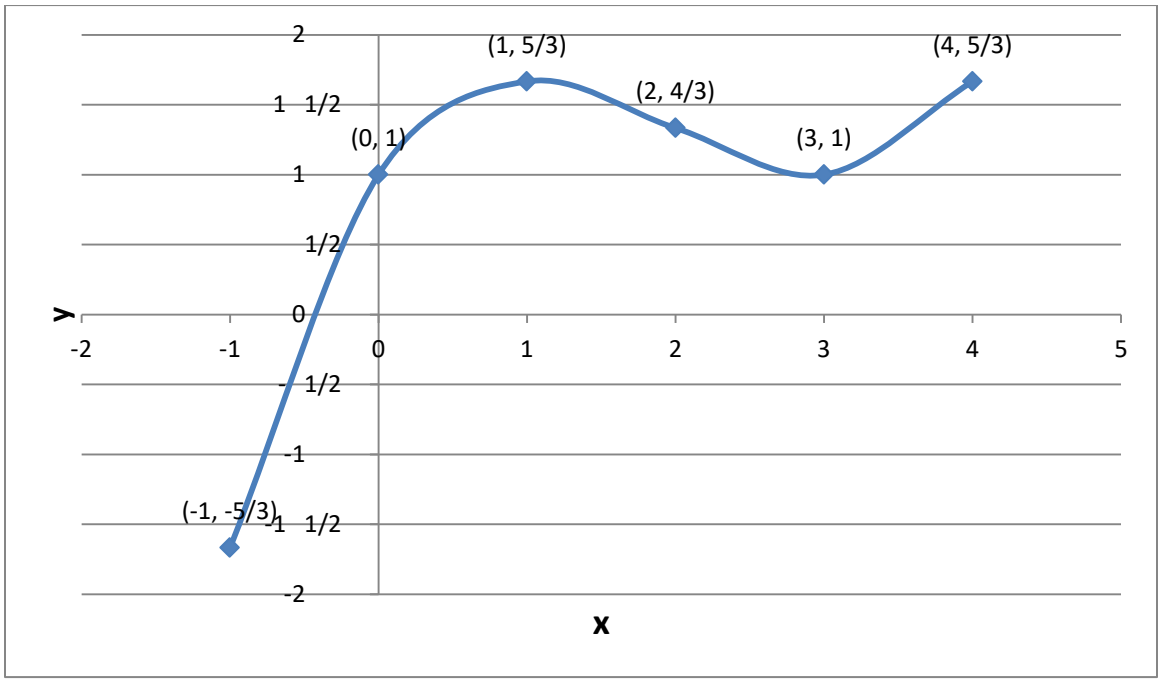
سوف نختار قيم اصغر من نقطة الانقلاب واخرى اكبر منها فاذا حصل اي تغير بالاشارة من الموجب الى السالب او بالعكس فالنقطة هي نقطة الانقلاب .

$y'' = x - 2$ عندما $\rightarrow x = 1 \quad \rightarrow y'' = 1 - 2 = -1$

عندما$\rightarrow x = 3 \rightarrow y'' = 3 - 2 = +1$

اذن x=2 هي نقطة الانقلاب حيث تكون (2,4/3) يمكن رسم المنحني وحسب المعطيات السابقة وكما يلي من الجدول قيم :

x	y	y´	y″
-1	-5/3	+	-
0	1	+	-
1	5/3	0	-
2	4/3	-	0
3	1	0	+
4	5/3	+	+


2
1 1/2
1
1/2
0
-1/2
-1
-1 1/2
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
5
y
x
(1, 5/3)
(2, 4/3)
(4, 5/3)
(0, 1)
(3, 1)
(-1, -5/3)