

التكامل :-

يعرف التكامل : على انه عملية ايجاد الدالة اخذت مشتقتها اي ان العملية (التكامل عكس (التفاضل ، المشتقة).

حيث ان التفاضل الدالة معلومة والمشتقة مجهولة اما في حالة التكامل المشتقة معلومة والدالة مجهولة .

يوجد نوعان من التكامل :

١- التكامل الغير محدد

٢- التكامل المحدد

قوانين التكامل (الدالة الجبرية) :

ملاحظة : c هنا يمثل ثابت التكامل

$$1) \int dx = x + c$$

ويمثل a العدد الثابت بهذه القوانين الخمسة

$$2) \int a dx = a \int dx = ax + c$$

$$3) \int [f(x) \mp g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$4) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$5) \int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

حيث ان u متغير ل x وان u لايساوي 1- لانه لايجوز القسمة على صفر

الامثلة :- اوجد تكامل الدوال الجبرية التالية :-

مثال(1) :-

$$Y = \int (x^5 + 3x^{-6} + 8x + 10) dx$$

$$= \int x^5 dx + 3 \int x^{-6} dx + 8 \int x dx + 10 \int dx$$

$$y = \frac{x^6}{6} + 3 \frac{x^{-5}}{-5} + 8 \frac{x^2}{2} + 10x + c$$

$$y = \frac{x^6}{6} - \frac{3}{5}x^{-5} + 4x^2 + 10x + c$$

مثال (2) :-

$$y = \int (x+2)(x-1) dx$$

(x+2)

$$= \int (x^2 - x + 2x - 2) dx$$

(x-1)

$$= \int x^2 dx - \int x dx + 2 \int x dx - 2 \int dx$$

x²+2x

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

-x-2
x²+x-2

مثال (3) :-

$$y = \int \frac{x^2 - 2}{x^2} dx$$

سوف اوزع المقام على حدود البسط

$$= \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int dx - 2 \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int dx - 2 \int x^{-2} dx$$

$$y = x - 2 \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$y = x + 2 \frac{1}{x} + c$$

مثال (4) :-

$$y = \int (x^2 + 2x - 5)^3 (x + 1) dx$$

بما ان القوس في هذا المثال يحوي داخله دالة والقوس مرفوع الى الاس اذن الدالة من نوع القانون الخامس من قوانين التكامل اذن في البداية سوف استخدم الفرضية التالية :

$$x^2 + 2x - 5 = u$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (2x + 2)$$

اقارن ما بين القوس $(x+1)$ وبين $\frac{du}{dx}$ نجد انه نحتاج الضرب والقسمة على 2 لاجل توفير مشتقة داخل القوس .

$$y = \frac{1}{2} \int (x^2 + 2x - 5)^3 (2x + 2) dx$$

الرقم الذي نضرب به يذهب مع اشارة التكامل اما الذي نقسم عليه فانه يظهر في نتيجة التكامل .

$$y = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2x - 5)^4}{4} + c$$

$$y = \frac{(x^2 + 2x - 5)^4}{8} + c$$

مثال (5) :-

$$y = \int \frac{(2x - 3)}{\sqrt{3x^2 - 9x + 1}} dx$$

اولاً نحول الجذر الى قوس مرفوع الى اس كسري

$$y = \int (3x^2 - 9x + 1)^{-\frac{1}{2}} (2x - 3)$$

الان نستخدم الفرضية :-

$$u = (3x^2 - 9x + 1)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (6x - 9)$$

اقارن ما بين القوس (2x-3) و $\frac{du}{dx}$ نرى انه ينقصنا ضرب ونقسم على 3 حتى لا تتغير قيمة المعادلة

$$y = \frac{1}{3} \int \frac{(3x^2 - 9x + 1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2} + 1} (6x - 9) dx$$

$$y = \frac{1}{3} \frac{(3x^2 - 9x + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$y = \frac{2}{3} (3x^2 - 9x + 1)^{\frac{1}{2}} + c$$

مثال (6) :-

$$y = \int ((1-x)\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 4x) dx$$

$$= \int (1-x)\sqrt{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + 4 \int x dx$$

احول الجذر الى اس كسري $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ وفي حالة ضرب $(1-x)(x^{\frac{1}{2}})$ نحصل على $(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})$ حيث عند الضرب تجمع الاسس وتصبح المعادلة اعلاه بالصيغة التالية :-

$$y = \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + 4 \int x dx$$

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + 4 \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - x^{-1} + 2x^2 + c$$

تكمال الدوال المثلثية :-

$$1- \int \sin u \, du = -\cos u + c$$

$$2- \int \cos u \, du = \sin u + c$$

$$3- \int \sec^2 u \, du = \tan u + c$$

$$4- \int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$$

$$5- \int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$$

$$6- \int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$$

(-) السالب يرافق كل دالة مثلثية تبدأ بالحرف c في ناتج تكاملها

أمثلة متنوعة عن تكامل الدوال المثلثية :-

مثال (1) :-

$$y = \int (3 \cos 3x + 5 \sin 2x) \, dx$$

نفكر بمشتقة الزاوية للدالة المثلثية حيث نفرض

$$\begin{aligned} 3x &= u \\ 3 &= \frac{du}{dx} \\ \therefore 3dx &= du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= u \\ 2 &= \frac{du}{dx} \\ 2dx &= du \\ dx &= \frac{du}{2} \end{aligned}$$

وبالضرب والقسمة على 2 ينتج

$$y = \int 3 \cos 3x dx + \int 5 \sin 2x dx$$

نوزع التكامل على حدود المعادلة

$$= \int \cos u du + 5 \int \sin \frac{du}{2}$$

وبالتعويض بالفرضية اعلاه

$$= \sin u + \frac{5}{2} (-\cos u) + c$$

نعوض عن u بما يساويها من الفرضية اعلاه

$$= \sin 3x - \frac{5}{2} \cos 2x + c$$

مثال (2):-

$$y = \int \sin \frac{x}{6} dx$$

نفرض ان $\frac{x}{6} = u$

اذن مشتقة الزاوية $1/6$ التي يجب ان نوفرها

$$\frac{1}{6} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{6} dx = du$$

$$\therefore dx = 6 du$$

نعوض بالفرضية اعلاه نحصل على :-

$$y = \int \sin u * 6 du$$

$$= 6(-\cos u) + c$$

$$= -6 \cos \frac{x}{6} + c$$

نرجع المعادلة الى اصلها ماقبل الفرضية
بالتعويض عن u بما يساويها

مثال (3):-

$$y = \int \tan^3 x \sec^2 x dx$$

$$\tan x = u$$

نفرض ان

$$\therefore \sec^2 x = \frac{du}{dx}$$

$$\sec^2 x dx = du$$

$$\therefore y = \int u^3 du$$

$$y = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\tan x)^4}{4} + c$$

مثال (4):-

$$y = \int \sec^3 x \tan x dx$$

$$= \int \sec^2 x \sec x \tan x dx$$

ملاحظة : عند الضرب تجمع الاسس

نفرض ان

$$\sec x = u$$

$$\sec x \tan x = \frac{du}{dx}$$

$$\sec x \tan x \, dx = du$$

$$y = \int (u)^2 du$$

باستخدام الفرضية اعلاه

$$= \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{(\sec x)^3}{3} + c = \frac{\sec^3 x}{3} + c$$

مثال (5):-

$$y = \int \frac{1 - \cos^2 2x}{1 + \cos 2x} dx$$

$$= \int \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{(1 + \cos 2x)} dx = \int (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \int dx - \int \cos 2x \, dx = x - \frac{\sin 2x}{2} + c$$

مثال (6):-

$$y = \int \sqrt{\cos x} \sin x \, dx$$

نحول الجذر الى اس كسري

$$= \int (\cos x)^{\frac{1}{2}} \sin x \, dx$$

نفرض ان

$$\cos x = u$$

$$-\sin x = \frac{du}{dx} \rightarrow -\sin x \, dx = du$$

$$\therefore \sin x \, dx = -du$$

نعوض بالفرضية بتكامل الدالة اعلاه ينتج

$$y = \int u^{\frac{1}{2}} (-du)$$

تضرب المعادلة بالسالب لأجل توفير مشتقة داخل القوس

$$= -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + c$$

تكامل الدوال اللوغارتمية :-

يمكن ان تكامل الدوال اللوغارتمية بواسطة القانونين التاليين :-

$$1) \quad y = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$2) \quad y = \int \frac{1}{u} du = \ln u + c$$

حيث تمثل u دالة للمتغير x

أمثلة متنوعة عن تكامل الدوال اللوغارتمية :-

مثال (1) :-

$$y = \int \frac{3x - 2}{x} dx$$

توزيع المقام على حدود البسط

$$= \int \left(\frac{3x}{x} - \frac{2}{x} \right) dx = \int \left(3 - \frac{2}{x} \right) dx = 3 \int dx - 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\therefore y = 3x - 2 \ln x + c$$

مثال (2) :-

$$y = \int \frac{dx}{(3x + 5)}$$

نفرض ان

$$3x + 5 = u$$

$$3 = \frac{du}{dx} \rightarrow 3dx = du \rightarrow \therefore dx = \frac{du}{3}$$

$$y = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{3}$$

نعوض بالفرضية بدالة التكامل ينتج

$$y = \frac{1}{3} \ln u + c = \frac{1}{3} \ln(3x + 5) + c$$

مثال (3) :-

$$y = \int \tan 8x dx$$

$$= \int \frac{\sin 8x}{\cos 8x} dx$$

نفرض ان

$$\cos 8x = u$$

$$-\sin 8x * 8 = \frac{du}{dx}$$

$$-8 \sin 8x dx = du$$

$$\sin 8x dx = -\frac{du}{8}$$

نعوض الفرضية بالسؤال اعلاه ينتج

$$\begin{aligned} y &= \int -\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{8} \\ &= -\frac{1}{8} \ln u + c \rightarrow -\frac{1}{8} \ln(\cos 8x) + c \end{aligned}$$

تكامل الدوال الاسية :-

يمكن ان تكامل الدوال الاسية بواسطة القانونين التاليين :-

$$1) y = \int e^x dx = e^x + c$$

$$2) y = \int e^u du = e^u + c$$

حيث u تمثل دالة للمتغير x

مثال (1) :-

$$y = \int x^2 e^{3x^3} dx$$

نفرض ان

$$3x^3 = u$$

$$9 x^2 = \frac{du}{dx}$$

$$9x^2 dx = du$$

$$\therefore x^2 dx = \frac{du}{9}$$

نعوض الفرضية بالسؤال اعلاه ينتج

$$y = \int e^u \frac{du}{9} \rightarrow \therefore y = \frac{1}{9} e^u + c = \frac{1}{9} e^{3x^3} + c$$

مثال (2) :-

$$y = \int e^{\sin 4x} \cos 4x dx$$

نفرض ان

$$\sin 4x = u$$

$$\cos 4x \cdot 4 = \frac{du}{dx}$$

$$4 \cos 4x dx = du$$

بقسمة الطرفين على 4

$$\cos 4x dx = \frac{du}{4}$$

نعوض الفرضية بالسؤال اعلاه ينتج

$$y = \int e^u \frac{du}{4}$$

$$y = \frac{1}{4} e^u + c = \frac{1}{4} e^{\sin 4x} + c$$

مثال (3) :-

$$y = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

نفرض ان

$$x^{\frac{1}{2}} = u$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = du$$

$$\therefore x^{-\frac{1}{2}}dx = 2du$$

نحول الجذر الى اس كسري

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{e^{x^{\frac{1}{2}}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= \int e^{x^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

نعوض حسب الفرضية

$$y = \int e^u \cdot 2du$$

$$y = 2 \cdot e^u + c = 2 \cdot e^{x^{1/2}} + c = 2 \cdot e^{\sqrt{x}} + c$$

مثال (4) :-

$$y = \int e^{2x^2+2x+5}(2x+1)dx$$

نفرض ان

$$(2x^2 + 2x + 5) = u \quad \rightarrow \therefore 4x + 2 = \frac{du}{dx}$$

اذن حتى اوفر مشتقة داخل القوس للدالة الاسية نضرب ونقسم على 2

$$y = \frac{1}{2} \int e^{2x^2+2x+5} 2(2x+1) dx = \frac{1}{2} e^{2x^2+2x+5} + c$$

طريقة التكامل بالتجزئة :-

نطبق القانون التالي :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

نستخدم القانون اعلاه لحساب التكامل حيث يجب فصل التكامل المعطى بالسؤال الى جزئين احدهما (u) والاخر هو dv ولهذا السبب يسمى بالتجزئة ويجب اتباع مايلي :

1- ينبغي ان يكون الجزء الذي اخترناه dv قابل لتكامل بصورة مباشرة .

2- ينبغي ان لا يكون تكامل (v du) اكثر تعقيداً من تكامل (u dv) .

3- يجب اضافة ثابت التكامل (c) في النتيجة النهائية .

أمثلة متنوعة عن التكامل بالتجزئة :-

مثال (1) :-

$$\int \ln x dx$$

نفرض ان

$$\ln x = u$$

$$\frac{1}{x} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{x} dx = du$$

نشتق الطرفين

$$\int dx = \int dv$$
$$x = v$$

نعوض بالقانون الاصلي لتكامل التجزئة

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

حيث يمثل (c) ثابت التكامل (يضاف للجواب عند الانتهاء من التكامل)

مثال (2) :-

$$\int x e^x \, dx$$

نفرض ان

$$x = u \quad \text{نشتق الطرفين}$$

$$dx = du$$

$$\int dv = \int e^x \, dx \quad \text{نكامل الطرفين}$$

$$v = e^x$$

نعوض بمعادلة تكامل التجزئة

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx$$

$$= x e^x - e^x + c$$

$$= e^x(x - 1) + c$$

مثال (3) :-

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

نفرض ان

نشتق الطرفين $\ln x = u$

$$\frac{1}{x} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{x} \cdot dx = du$$

نكامل الطرفين $\int dv = \int x^2 \, dx$

$$v = \frac{x^3}{3}$$

نعوض في معادلة التجزئة

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int \ln x \, x^2 \, dx = \ln x * \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^3 * \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c$$

التكامل بطريقة الكسور الجزئية :-

تسمى الدالة $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ نسبية اذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ متعددة حدود وعند اجراء التكامل نجزء الكسر الى كسور بسيطة ثم نجري بعد ذلك التكامل .

أمثلة متنوعة عن التكامل بواسطة تجزئة الكسور (الكسور الجزئية):

مثال (1) :-

$$y = \int \frac{dx}{(x^2 - 4)}$$

$$\because (x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$$

$$\therefore \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} \quad \text{بتوحيد المقامات}$$

$$\frac{1}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

إذا تساوت المقامات تتساوى البسوط

$$\therefore 1 = A(x + 2) + B(x - 2) \quad \dots \dots (1)$$

لايجاد قيم A,B نلاحظ القوس المضروب A نجعل قيمة القوس مساوية للصفر

اي ان

$$(x + 2) = 0 \rightarrow x = -2$$

اعوض عن $x = -2$ بالمعادلة (1)

$$1 = A(-2 + 2) + B(-2 - 2)$$

$$1 = -4B \rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

ثم نجعل القوس المضروب B مساوي للصفر اي ان

$$(x - 2) = 0 \rightarrow x = 2$$

اعوض بالمعادلة (1)

$$1 = A(2 + 2) + B(2 - 2)$$

$$\therefore 1 = 4A \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

الان اكتب دالة التكامل بدلالة B,A :-

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \int \frac{A}{x - 2} dx + \int \frac{B}{x + 2}$$

اعوض عن A,B بما يساويها

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 4} &= \int \frac{\frac{1}{4}}{(x - 2)} dx + \int \frac{-\frac{1}{4}}{(x + 2)} \\ &= \frac{1}{4} \ln(x - 2) - \frac{1}{4} \ln(x + 2) + c \end{aligned}$$

مثال (2) :-

$$y = \int \frac{2x + 41}{x^2 + 5x - 14} dx$$

نستخدم طريقة تجزئة الكسور حيث نحلل المقام وكما يلي :

$$x^2 + 5x - 14 = (x + 7)(x - 2)$$

$$\frac{2x + 41}{(x + 7)(x - 2)} = \frac{A}{(x + 7)} + \frac{B}{(x - 2)} \quad \dots \dots (1)$$

اذا تساوت المقامات تتساوى البسوط

$$\therefore 2x + 41 = A(x - 2) + B(x + 7) \quad \dots \dots \dots (2)$$

نأخذ القوس المضروب ب A ونساويه بالصفر

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

نعوض عن قيمة x=2 بالمعادلة (2)

$$2 * 2 + 41 = A(2 - 2) + B(2 + 7)$$

$$45 = 9B \rightarrow B = \frac{45}{9} = 5$$

نأخذ القوس المضروب B ونساويه بالصفر

$$x + 7 = 0 \rightarrow x = -7$$

نعوض بالمعادلة رقم (2)

$$2 * -7 + 41 = A(-7 - 2) + B(-7 + 7)$$

$$27 = -9A \rightarrow A = \frac{27}{-9} = -3$$

نعوض عن A, B بما يساويها بالمعادلة (1) حيث ان $A = -3, B = 5$

$$\int \frac{2x + 41}{x^2 + 5x - 14} dx = \int \frac{A}{(x + 7)} dx + \int \frac{B}{(x - 2)} dx$$

$$\int -\frac{3}{(x + 7)} dx + \int \frac{5}{(x - 2)} dx$$

$$= -3 \ln(x + 7) + 5 \ln(x - 2) + c$$

مثال (3) :-

$$y = \int \frac{X - 9}{2x^2 - X - 3}$$

سوف أحلل المقام حتى اتمكن من ايجاد تكامل الدالة باستخدام تكامل تجزئة الكسور

$$2x^2 - X - 3 = (X + 1)(2x - 3)$$

$$\frac{x - 9}{2x^2 - x - 3} = \frac{x - 9}{(x + 1)(2x - 3)} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(2x - 3)}$$

$$= \frac{x-9}{(x+1)(2x-3)} = \frac{A(2x-3) + B(x+1)}{(x+1)(2x-3)}$$

$$\therefore x-9 = A(2x-3) + B(x+1) \dots\dots\dots (1)$$

$$x=3/2 \quad X=-1$$

عندما $x=3/2$ نعوض بالمعادلة (1)

$$\frac{3}{2} - 9 = A\left(2 * \frac{3}{2} - 3\right) + B\left(\frac{3}{2} + 1\right)$$

$$\frac{3-18}{2} = B\left(\frac{3+2}{2}\right)$$

$$-\frac{15}{2} = B\frac{5}{2} \rightarrow -\frac{30}{10} = -3$$

عندما $x=-1$ نعوض بالمعادلة (1)

$$-1 - 9 = A(2 * -1 - 3) + B(-1 + 1)$$

$$-10 = -5A \rightarrow A = \frac{10}{5} = 2$$

$$\therefore \int \frac{x-9}{2x^2-x-3} dx = \int \frac{A}{(x+1)} dx + \int \frac{B}{(2x-3)} dx$$

اعوض عن A,B بما يساويها :-

$$= \int \frac{2}{(x+1)} dx + \int -\frac{3}{(2x-3)} dx$$

$$= 2 \ln(x+1) - 3 \ln(2x-3) + c$$

من بداية تعريف التكامل ذكرنا انه يمكن ان تكون صيغة السؤال جد تكامل الدالة التالية اوجد الحل للمعادلة التفاضلية التالية نفس صيغتي السؤال تعني ايجاد تكامل الدالة ولكن

في حالة اعطاء قيم نقطة في الدالة يمكن ايجاد قيمة ثابت التكامل في تلك النقطة ويكون كما يلي من الامثلة .

حل المعادلة التفاضلية :-

ان ايجاد الحل للمعادلة التفاضلية هو ايجاد التكامل لتلك الدالة اي ارجاع الدالة الى صيغتها الاساسية ما قبل الاشتقاق .

مثال (1):- اوجد الحل للمعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - 7$$

عند $x=0$, $y=3$ اي (0,3)

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - 7$$

$$dy = (\cos x - 7)dx$$

ناخذ تكامل الطرفين

$$\int dy = \int (\cos x - 7)dx$$

$$\int dy = \int \cos x dx - 7 \int dx$$

$$y = \sin x - 7x + c$$

عندما $x=0$, $y=3$

نعوض عن x,y بقيمتها التي ذكرت بالسؤال

$$3 = \sin 0 - 7 * 0 + c$$

$$3 = 0 - 0 + c \quad \rightarrow c = 3$$

هذا هو الحل للمعادلة اعلاه

$$\therefore y = \sin x - 7x + 3$$

مثال (2) :-

اوجد الحل للمعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 8$$

اذا كانت $x=3$, $y=0$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 8$$

$$dy = (6x - 8)dx$$

ناخذ تكامل الطرفين

$$\int dy = \int (6x - 8)dx$$

$$\int dy = 6 \int x dx - 8 \int dx$$

$$y = \frac{6x^2}{2} - 8x + c \rightarrow y = 3(x)^2 - 8x + c$$

نعوض عن $x=3, y=0$ بالمعادلة اعلاه

$$0 = 3(3)^2 - 8(3) + c$$

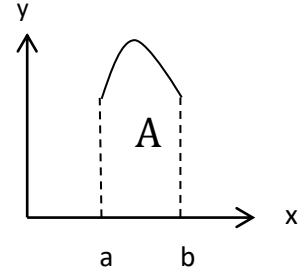
$$0 = 27 - 24 + c \rightarrow c = -3$$

هذا هو الحل للمعادلة التفاضلية اعلاه في النقطة (3,0)

$$\therefore y = 3x^2 - 8x - 3$$

التكامل المحدد :-

1) المساحة تحت المنحني : حيث ان قيمة $a < b$ وان A تمثل المسافة تحت المنحني



والصيغة العامة لايجاد المساحة تحت المنحني :

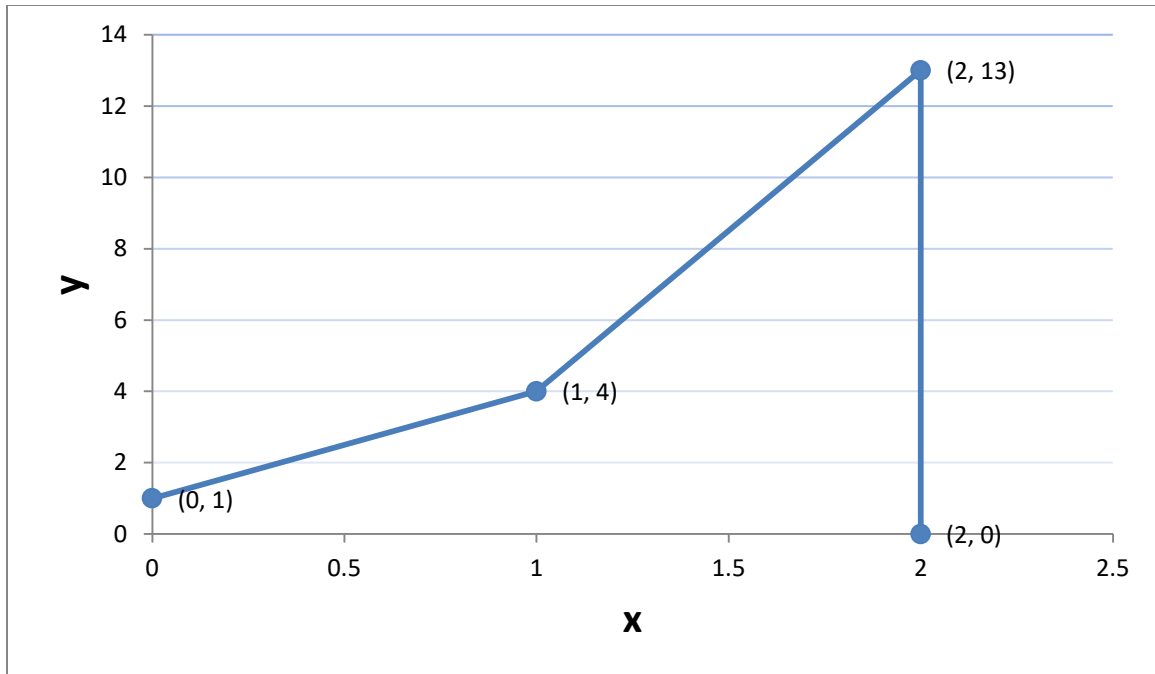
$$A_a^b = \int_a^b F(x)dx$$

حيث ان $F(x)$ تمثل معادلة المنحني وعادة تعطي بالسؤال

مثال (1) :-

اوجد المساحة تحت المنحني المحددة بالمنحني $y=x^3+2x+1$ والاحداثي السيني ضمن الفترة (0,2)

X	$Y=x^3+2x+1$
0	$Y=(0)^3+2(0)+1=1$
1	$Y=(1)^3+2(1)+1=4$
2	$Y=(2)^3+2(2)+1=13$



$$y = x^3 + 2x + 1$$

$$A_a^b = \int_a^b F(x) dx$$

$$A_0^2 = \int_0^2 (x^3 + 2x + 1) dx$$

نكامل اولاً بعد ذلك نعوض بحدود التكامل

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} + x \right]_0^2$$

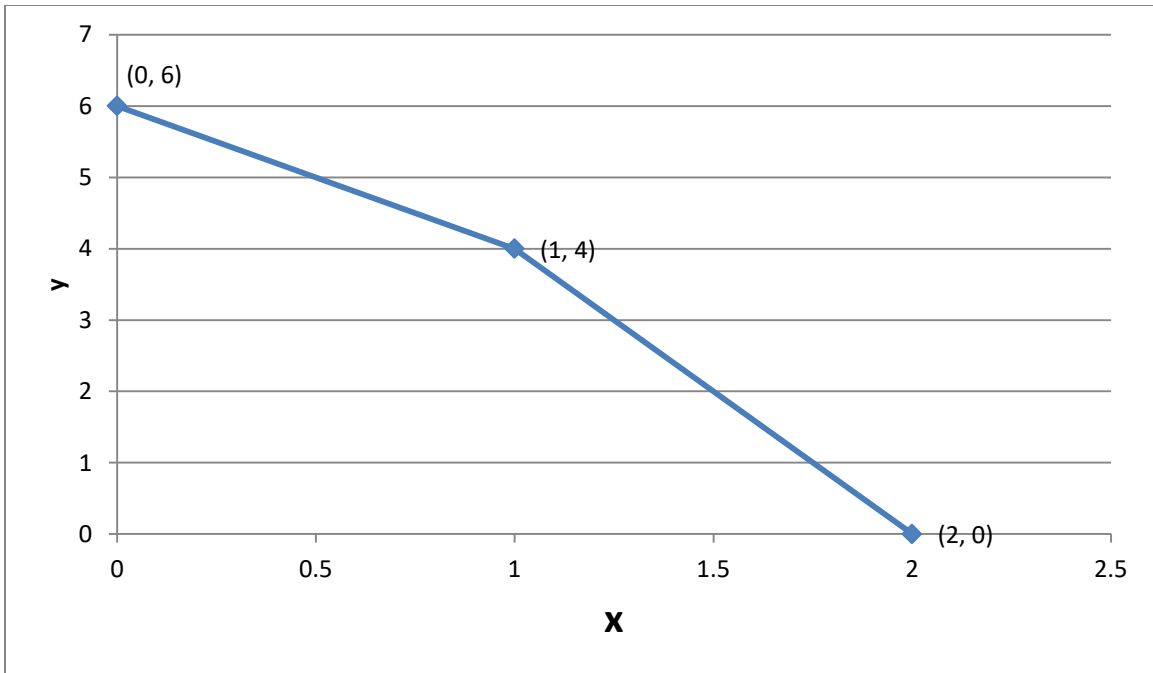
التعويض يكون بالحد الاعلى مطروح منه التعويض بالحد الادنى

$$= \left[\frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{1} + 2 \right] - [0] = \frac{16}{4} + 4 + 2 = 4 + 4 + 2 = 10 \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (2) :-

اوجد المساحة تحت المنحني $y=6-x-x^2$ والاحداثي السيني ضمن الفترة (0,2)

X	Y=6-x-x ²
0	Y=6-0-(0) ² =6
1	Y=6-(1)-(1) ² =4
2	Y=6-(2)-(2) ² =0



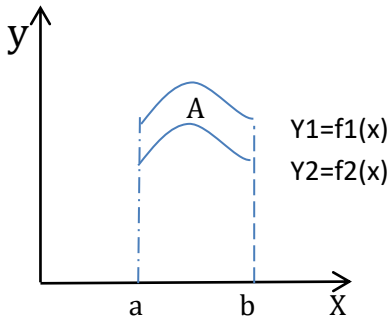
الصيغة العامة لإيجاد المسافة تحت المنحني

$$A_a^b = \int_a^b f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
A_0^2 &= \int_0^2 (6 - x - x^2) dx \\
&= 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 \\
&= \left[6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3} \right] - [0] \\
&= \left[12 - 2 - \frac{8}{3} \right] - [0] = 7.4 \text{ وحدة مربعة}
\end{aligned}$$

2 (المساحة بين منحنين :-

الصيغة العامة لإيجاد المساحة $A_a^b = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$



الخطوات الرئيسية لإيجاد المساحة بين منحنين :-

١- يتم كتابة الجدول لكلاً من المنحنين وذلك لأجل معرفة الأكبر والأصغر بينهما (الأكبر يكتب أولاً ويطرح منه الأصغر) حتماً يكون ناتج المساحة موجب لأن المساحة لا يجوز أن تكون سالبة .

٢- حساب قيمة المساحة بين منحنين المذكورين بالسؤال وذلك بواسطة استخدام التكامل المحدد (الفترة الموجودة في السؤال) وتعطى عادة على شكل فترة (a,b).

مثال (1) :- اوجد المساحة بين منحنين المحددة بالمنحنى $y = 3x^2 + 2x + 5$

والخط المستقيم $y = 5 - 4x$ ضمن الفترة $(-2,0)$

$$y = 3x^2 + 2x + 5$$

$$y = 5 - 4x$$

الصيغة العامة لاجاد المساحة بين منحنين

$$A_a^b = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

X	Y=3x ² +2x+5	الاصغر
0	Y=3(0) ² +2(0)+5=5	
-1	Y=3(-1) ² +2(-1)+5=6	
-2	Y=3(-2) ² +2(-2)+5=13	

نقارن بين قيم المنحنيين
ونرى ان المنحنى الثاني
والقيمة الثانية اكبر
اذن المنحنى الثاني هو
الاكبر

X	Y=5-4x	الاكبر
0	Y=5-4(0)=5	
-1	Y=5-4(-1)=9	
-2	Y=5-4(-2)=13	

$$A_{-2}^0 = \int_{-2}^0 ([5 - 4x] - [3x^2 + 2x + 5])dx$$

نفتح الحدود ونبسط الحدود الى ابسط صورة

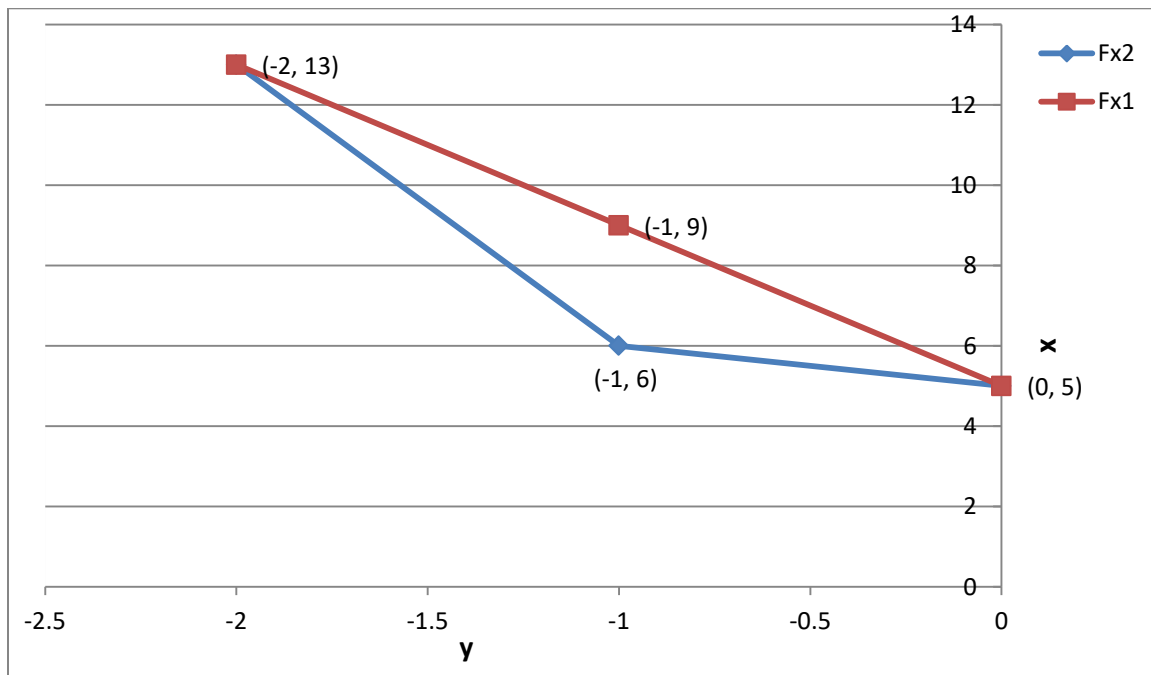
$$= \int_{-2}^0 [5 - 4x - 3x^2 - 2x - 5]dx$$

$$= \int_{-2}^0 (-6x - 3x^2) dx$$

$$= -6 \frac{x^2}{2} - 3 \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^0$$

$$= \left[-6 \frac{(0)^2}{2} - 3 \frac{(0)^3}{3} \right] - \left[-6 \frac{(-2)^2}{2} - 3 \frac{(-2)^3}{3} \right]$$

$$= [0] - [-3(2)^2 - (-2)^3] = [0] - [-12 + 8] = 4 \text{ وحدة مربعة}$$



مثال (2):-

اوجد المساحة بين المنحنيين

$$y_1 = 2x^2$$

$$y_2 = x^4 - 2x^2$$

ضمن الفترة (0,2)

الصيغة العامة لاجاد المساحة بين منحنيين

$$A_a^b = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

X	Y=2x ²	الاكبر
0	Y=2(0) ² =0	
1	Y=2(1) ² =2	
2	Y=2(2) ² =8	

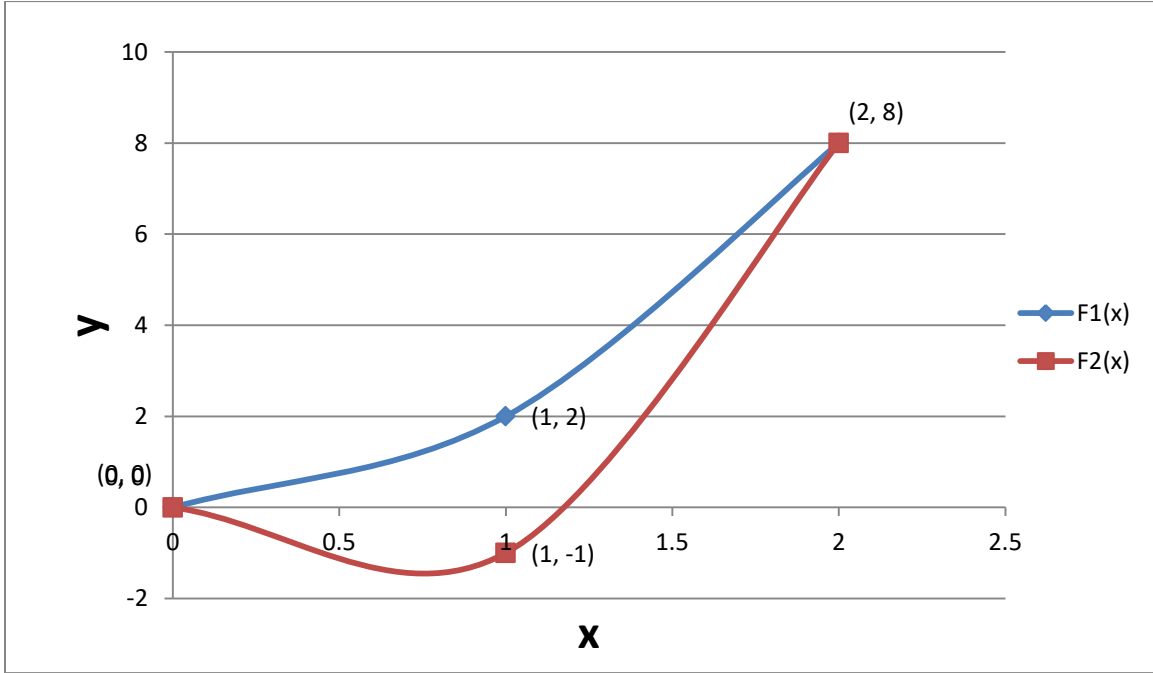
نقارن بين المنحنيين
ونرى من هما الاكبر
نرى المنحني الاول
أكبر

X	Y=x ⁴ -2x ²	الاصغر
0	Y=(0) ⁴ -2(0) ² =0	
1	Y=(1) ⁴ -2(1) ² =-1	
2	Y=(2) ⁴ -2(2) ² =8	

$$A_0^2 = \int_0^2 [2x^2 - (x^4 - 2x^2)]dx = \int_0^2 (2x^2 - x^4 + 2x^2) dx$$

$$= 4 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \left[4 \frac{(2)^3}{3} - \frac{(2)^5}{5} \right] - [0] = 10.6 - 6.4 = 4.2 \text{ وحدة مربعة}$$



المتجهات -: Vectors

ايجاد مقدار واتجاه المتجهات

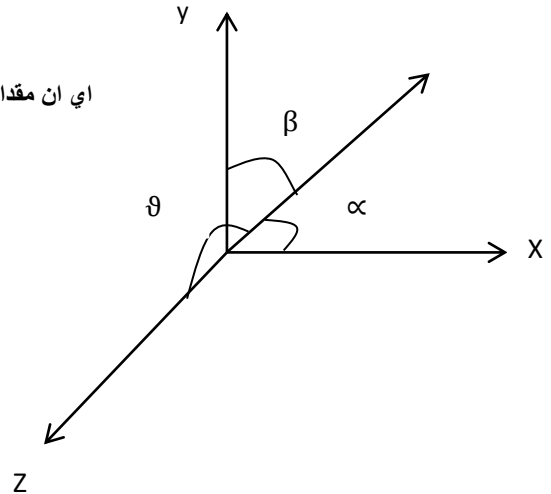
$$\vec{A} = x i + y j + z k$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{اي ان مقدار المتجه } \vec{A} \text{ يحسب بواسطة}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{A}|}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\vec{A}|}$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{|\vec{A}|}$$



مثال :- اذا كانت احداثيات النقطة (P) هي (3,4,12) اوجد المتجه $\overrightarrow{OP}$ وعين مقداره واتجاه جيوب التمام .

$$\overrightarrow{OP} = 3i + 4j + 12k$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ unit}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{op}|} = \frac{3}{13}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\overrightarrow{op}|} = \frac{4}{13}$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{|\overrightarrow{op}|} = \frac{12}{13}$$

الضرب الاتجاهي للمتجهات :- Cross product

اذا كان لدينا المتجهين

$$\vec{A} = a_1i + b_1j + c_1k$$

$$\vec{B} = a_2i + b_2j + c_2k$$

$$\therefore A * B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

مثال :- اذا كان لدينا المتجهين

$$\vec{A} = i + 2j + 3k$$

$$\vec{B} = 2i + j - k$$

اوجد حاصل الضرب الاتجاهي ($\vec{A}, \vec{B}$) ؟

$$\vec{A} * \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2i + 6j + 1k - 4k - 3j + 1j = -5i + 7j - 3k$$

الضرب الكمي (النقطي) للمتجهات :- Dot product

إذا كان لدينا المتجهين

$$\vec{A} = a_1i + b_1j + c_1k$$

$$\vec{B} = a_2i + b_2j + c_2k$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 * a_2 + b_1 * b_2 + c_1 * c_2$$

مثال (1) :-

إذا كان لدينا المتجهين

$$\vec{A} = 3i - j + 5k$$

$$\vec{B} = 5i + 3j - 2k$$

اوجد الضرب الكمي (النقطي) للمتجهين $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 5 * 3 + (-1 * 3) + 5 * (-2) = 15 - 3 - 10 = 2 \text{ unit}$$

مثال (2) :-

إذا كان لدينا المتجهين

$$\vec{A} = 4i + j + k$$

$$\vec{B}=3i+4j+5k$$

اوجد كلاً $\vec{A} \cdot \vec{B}$ و $\vec{A} * \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 4 * 3 + 1 * 4 + 1 * 5 = 12 + 4 + 5 = 21 \text{ unit}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} * \vec{B} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & j \\ 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5i + 3j + 16k - 3k - 4i - 20j = \\ &= i - 17j + 13k \end{aligned}$$

الطرق التقريبية لايجاد المساحة تحت المنحني :-

1- طريقة شبه المنحرف T :-

بهذه الطريقة نستخدم القانون التالي :-

$$A_T = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

حيث ان n هو اختبار عدد زوجي او عدد فردي

$$h = \frac{b-a}{n}$$

مثال (1) :-

باستخدام طريقة شبه المنحرف اوجد المساحة التقريبية تحت المنحني $y=6-x-x^2$ ضمن الفترة (-3,2)

الحل :-

$$A_T = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

n يمكن ان نختاره عدد زوجي او فردي

سوف نختار n=5

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$h = \frac{2 - (-3)}{5} = \frac{5}{5} = 1 \quad \therefore h = 1$$

الان سوف اوجد قيم كلا من $y_0, \dots, y_5$

وذلك بتعويض عن قيم X التي في الفترة $(-3, 2)$ بمعادلة المنحني $Y = 6 - X - X^2$ وكما يلي موضح بالجدول التالي :

X	$Y = 6 - X - X^2$
-3	$Y_0 = 6 - (-3) - (-3)^2 = 9 - 9 = 0$
-2	$Y_1 = 6 - (-2) - (-2)^2 = 8 - 4 = 4$
-1	$Y_2 = 6 - (-1) - (-1)^2 = 7 - 1 = 6$
0	$Y_3 = 6 - (0) - (0)^2 = 6$
1	$Y_4 = 6 - (1) - (1)^2 = 4$
2	$Y_5 = 6 - (2) - (2)^2 = 4 - 4 = 0$

$$A_T = \frac{h}{2} (Y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)$$

$$A_T = \frac{1}{2} (0 + 2 * 4 + 2 * 6 + 2 * 6 + 2 * 4 + 0) = \frac{1}{2} * 40$$

= 20 وحدة مربعة

مثال (2):- اوجد المساحة التقريبية تحت المنحني $y = x^2 + 3x - 2$ باستخدام طريقة شبه المنحرف للفترة $(1, 5)$

الحل : نختار $n=4$

$$\therefore h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

X	Y=x ² +3x-2
1	Y ₀ =(1) ² +3(1)-2=2
2	Y ₁ =(2) ² +3(2)-2=8
3	Y ₂ =(3) ² +3(3)-2=16
4	Y ₃ =(4) ² +3(4)-2=26
5	Y ₄ =(5) ² +3(5)-2=38

$$T = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4)$$

$$A_T = \frac{1}{2} (2 + 2(8) + 2(16) + 2(26) + 38)$$

$$= \frac{1}{2} (2 + 16 + 32 + 52 + 38) = \frac{1}{2} (140) = 70 \text{ وحدة مربعة}$$

2 (طريقة سمبسون (S) :-

نستخدم بهذه الطريقة القانون التالي :-

$$A_S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots \dots \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{ونختار } n \text{ عدد زوجي فقط}$$

مثال (1):-

اوجد المساحة التقريبية للمساحة تحت المنحني $y=(2x+1)^2$ ضمن الفترة (-1,3) باستخدام طريقة سمبسون

$$A_S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots \dots \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - (-1)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

X	$y=(2x+1)^2$
-1	$Y_0=(2(-1)+1)^2=(-1)^2=1$
0	$Y_1=(2(0)+1)^2=(1)^2=1$
1	$Y_2=(2(1)+1)^2=(3)^2=9$
2	$Y_3=(2(2)+1)^2=(5)^2=25$
3	$Y_4=(2(3)+1)^2=(7)^2=49$

$$A_s = \frac{1}{3}(1 + 4 * 1 + 2 * 9 + 4 * 25 + 49)$$

$$\therefore A_s = \frac{1}{3}(1 + 4 + 18 + 100 + 49) = 57.3 \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (2) :-

باستخدام طريقة سمبسون اوجد المساحة تحت المنحني $y=2x^2-3$ ضمن الفترة (2,8)

اذا اخذنا $n=6$

$$\therefore h = \frac{b - a}{n} = \frac{8 - 2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

X	Y=2x ² -3
2	Y ₀ =2(2) ² -3=2(4)-3=5
3	Y ₁ =2(3) ² -3=2(9)-3=15
4	Y ₂ =2(4) ² -3=2(16)-3=29
5	Y ₃ =2(5) ² -3=2(25)-3=47
6	Y ₄ =2(6) ² -3=2(36)-3=69
7	Y ₅ =2(7) ² -3=2(49)-3=95
8	Y ₆ =2(8) ² -3=2(64)-3=125

$$A_s = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$A_s = \frac{1}{3}(5 + 4(15) + 2(29) + 4(47) + 2(69) + 4(95) + 125)$$

$$= \frac{1}{3}(5 + 60 + 58 + 188 + 138 + 380 + 125) = \frac{1}{3}(954)$$

$$A_s = 318 \text{ وحدة مربعة}$$