المصفوفات Matrixes

المصفوفة : المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الاعداد مرتبة على شكل مستطيل محاطة باقواس، وسنفرض جميع المدخلات في المصفوفة على انها تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية والمعقدة، يرمز للمصفوفة بالرموز A,B,C,.......... ومدخلات المصفوفة بالرمز a_{ij}.

$$A=[a_{ij}] = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \ldots \ldots \; a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ldots \ldots \; a_{2n} \\ \\ a_{m1} \ldots \ldots \ldots \ldots a_{mn} \end{vmatrix}_{m*n}$$

المصفوفة مدخلات المصفوفة

حيث :m = صف، n= عمود

الصف Row i=1,2,3,......m

العمود Column j=1,2,3,.......n

فالمصفوفة A مكونة من m من الصفوف و n من الاعمدة ويقال لها بانها مصفوفة من سعة (m*n) اي انها مكونة من mn من العناصر ويمكن التعبير عنها بالصيغة A_{m*n}
وعادة نرقم الصفوف من الاعلى الى الاسفل والاعمده من اليسار الى اليمين فمثلا ان العنصر a_{12} يقع في الصف الأول والعمود الثاني

Example (1):

جد سعة المصفوفة واكتب العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الرابع ثم اكتب العمود الثالث وايضا الصف الاول ؟

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

المصفوفة من سعة 3*4

العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الرابع هو 5

العمودالثالث في هذه المصفوفة هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

الصف الاول لهذه المصفوفة هو $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

تسمى المصفوفة مربعة اذا كانت المصفوفة A من السعة (m*n) واذا كان (m=n) (اي ان عدد الصفوف يساوي عدد الاعمدة) كما في المصفوفة ادناه:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}_{3*3}$$

انواع المصفوفات :

1. **المصفوفة القطرية**(Diagonal Matrix): تسمى المصفوفة قطرية عندما جميع عناصر قطرها متساوية ولها قيمة ثابته Constant(C) حيث ان aij=c لكل i=j

Example(2):

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}_{4*4}$$

2. **المصفوفة الصفرية**: Null Matrix , Zero Matrix

وهي المصفوفة التي يكون جميع مدخلاتها اصفار.

Example(3):

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{3*3}$$

3. **مصفوفة الوحدة** : **Identity Matrix**

وهي المصفوفة التي يكون جميع عناصر قطرها الرئيسي واحد والباقي اصفار، ونرمز لها بالرمز I.

Example (4):

$$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2*2} \quad ; \quad I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3*3}$$

.4 مدور المصفوفة : Transpose of Matrix

وهي تغير اعمدة المصفوفة بدل صفوفها او تغيير الصفوف بدل الاعمدة

Example (5):

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 6\end{bmatrix}_{2*3} \quad ; \; A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}_{3*2}$$

العمليات الجبرية على المصفوفات :

1. الجمع والطرح

If $A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}$

$$A\pm B=\begin{bmatrix}a_1\pm b_1 & a_2\pm b_2\\ a_3\pm b_3 & a_4\pm b_4\end{bmatrix}$$

Example (6):

Let $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

Find(1) A+B (2)A-B

(1) $A+B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 8 & 7\end{bmatrix}$

(2) $A-B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

H.W.

IF $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$, *Find* : A+B , A − B , A^T, B^T

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ جد : A+B

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+0) & (-1+1) & (0+5) \\ (3+6) & (6-3) & (\frac{1}{2}+\frac{3}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ملاحظةللتذكير في حالة لديك كسور وكان مقامها متساوي فنقوم بجمع او طرح البسوط لكل منها اما في حالة كانت المقامات مختلفة فنقوم بتوحيد المقامات ونجد الناتج بطريقة التقليدية

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1/2 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1/2 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ جد : A-B

$$A-B = \begin{bmatrix} (3-2) & (-1-(-2)) & (0-5) \\ \left(5-\frac{1}{2}\right) & (\frac{1}{2}-6) & (6-(-2)) \\ (1-(-3)) & (2-0) & (-3-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4\frac{1}{2} & -5\frac{1}{2} & 8 \\ 4 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

ملاحظة: عند ضرب مصفوفة في ثابت (Constant) نضرب كل عناصر المصفوفة في ذلك الثابت .

Example (7):

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 5\end{bmatrix},\ C=2$$

$$CA=2\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 4\\8 & 10\end{bmatrix}$$

ملاحظة:
عند ضرب مصفوفتين يجب ان يكون عدد الاعمدة في المصفوفة الاولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية .

Example (8):

IF $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\3 & 1 & 2\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $Find$: A X B ، $B \times A$ ، 2A+B

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\3 & 1 & 2\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}1*3+1*3+1*3 & 1*1+1*1+1*1 & 1*2+1*2+1*2\\2*3+2*3+2*3 & 2*1+2*1+2*1 & 2*2+2*2+2*2\\0*3+0*3+0*3 & 0*1+0*1+0*1 & 0*2+0*2+0*2\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}3+3+3 & 1+1+1 & 2+2+2\\6+6+6 & 2+2+2 & 4+4+4\\0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}9 & 3 & 6\\18 & 6 & 12\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\3 & 1 & 2\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}5 & 5 & 5\\5 & 5 & 5\\5 & 5 & 5\end{bmatrix}$$

$$2A+B=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\4 & 4 & 4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\3 & 1 & 2\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 4\\7 & 5 & 6\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Example (9):

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\4 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\0 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}\ Find:\ A\times B\ ,\quad B\times A$$

1. $A\times B=\begin{bmatrix}2*3+5*0+3*1 & 2*2+5*2+3*2 & 2*3+5*3+3*3\\4*3+2*0+1*1 & 4*2+2*2+1*2 & 4*3+2*3+1*3\end{bmatrix}$

$$A\times B=\begin{bmatrix}9 & 20 & 30\\13 & 14 & 21\end{bmatrix}$$

2. $B\times A=$ لا يمكن ايجاد B×A لان عدد اعمدة B لا يساوي عدد صفوف A

Example (10):

لتكن

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\5 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 5\\0 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$$

جد A . B , B . A

$$A\times B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\5 & 0 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & 5\\0 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}0 & 13\\-7 & 25\end{bmatrix}$$

H.W. $B\times A=?$

H. W. (3) :

مثال : اذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\4 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & -4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 4\\-2 & -1\end{bmatrix}$$

جد : A+B ، A-B ، A·B ، (A·B)C ، 2A-3C ؟

المحددات Determinants

المحدد : هو عبارة عن مصفوفة مربعة (عدد الصفوف = عدد الاعمدة) محاطة بقطعتي مستقيمين شاقوليين | | ويرمز له $|A|$ او detA او D.

ايجاد قيمة المحدد الثنائي

Let A= $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$

A=(3*6)-(4*2)

A= 18-8

القطر الايسر

القطر الايمن

A=10

Example (10): **IF D=$\begin{vmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{X} \end{vmatrix}$ = 0 FIND X**

$(X * X)-(1*4) = 0$

$X^2-4=0$

$X^2=4$

$X=\mp 2$

ايجاد قيمة المحدد الثلاثي :

1. الطريقة الاولى : الطريقة الخاصة او طريقة التدوير (Rotate)

A= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{3*3}$

وتطبق هذه الطريقة حسب الخطوات التالية :

اولا : نكرر كتابة العمودين الاول والثاني بالترتيب الى يمين المحدد .

$$A=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

ثانيا: نحدد العناصر الواقعة على الاقطار من خلال تاشيرها بأسهم كما في الشكل ادناه

$$A=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

ثالثا: **ايجاد المجموع الجبري لنتائج ضرب عناصر الاقطار الموجبه والسالبه كما هو مبين في الاسهم (اعلاه) وكما يلي:**

$$A= (a_{11})(a_{22})(a_{33})+(a_{12})(a_{23})(a_{31})+(a_{13})(a_{21})(a_{32})-(a_{13})(a_{22})(a_{31})-(a_{11})(a_{23})(a_{32})-(a_{12})(a_{21})(a_{33})$$

<u>Example:(11)</u> Find the value of the det .A

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل :

نقوم باضافة عمودين (التدوير)

$$A=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right.$$

$$A=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right.$$

$$|A| = (1\times 1\times 1) + (1\times 3\times 3) + (1\times 2\times 1) - (1\times 2\times 1) - (1\times 3\times 1) - (1\times 1\times 3)$$

$$|A| = 1+9+2-2-3-3$$

$$|A| = 12-8$$

$$|A| = 4$$

2 : الطريقة الثانية(طريقة التجزئة)

في هذه الطريقة نختار اي صف او اي عمود وثم نقوم بايجاد المحدد المساعد لكل عنصر من عناصر هذا الصف او العمود الذي تم اختياره ، حيث ان لكل عنصر من عناصر المحدد الثلاثي محدد مساعد له ينتج من حذف العناصر الاخرى الموجودة في الصف او العمود الذي يحتوي ذلك العنصر، فمثلاً المحدد المساعد للعنصر 3 من الصف الاول والعمود الثاني في المثال(12)هو $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

بينما المحدد المساعد للعنصر 5 من الصف الثاني والعمود الاول في هذا المثال هو $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$

بعد ايجاد المحدد المساعد لكل عنصر من عناصر هذا الصف او العمود الذي تم اختياره نقوم بضربه في العنصر الخاص به مع جمع او طرح هذه المحددات المساعدة وحسب اشارة كل عنصر و مع اتباع قاعدة الاشارات المبينة في الجدول ادناه :

	العمود الاول	العمود الثاني	العمود الثالث
الصف الأول R1	+	-	+
الصف الثاني R2	-	+	-
الصف الثالث R3	+	-	+

Example:(12) Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي بطريقة التجزئة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

لو اخذنا الصف الاول فالحل يكون:

$$|A| = 2\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(-7+36) - 3(35-18) - 4(-30+3)$$

$$|A| = 2(29) - 3(17) - 4(-27)$$

$$|A| = 58 - 51 + 108 = 115$$

اما لو اخذنا الصف الثاني فالحل يكون:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -5\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -5(21-24) - (14+12) - 6(-12-9)$$

$$|A| = 15 - 26 + 126 = 115$$

Example:(13) Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & 5 & 6\\ 7 & -8 & 9\end{bmatrix}_{3*3}$$

Solution : **الحل:**

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 3 & 1 & 2\\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5\\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8\end{array}\right|$$

$$|A|=(1)(5)(9)+(2)(6)(7)+(3)(-4)(-8)$$
$$-(3)(5)(7)-(1)(6)(-8)-(2)(-4)(9)$$
$$=45+84+96-105+48+72$$
$$\therefore |A|=240$$

Example:(14) Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -5 & 4\\ 2 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}_{3*3}$$

Solution : **الحل:**

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}-2 & -5 & 4 & -2 & -5\\ 2 & 0 & 7 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right|$$

$$|A|=(2*0*-1)+(-5*7*0)+(4*2*1)-(4*0*0)-(-2*7*1)-(-5*2*-1)$$
$$\therefore |A|=0+0+8-0+14-10$$
$$\therefore |A|=12$$

Example:(15) Find the value of the det .A

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Solution : **الحل:**

$$|A|=1*\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}-1*\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}+2*\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$|A|=-1-1+4=2$$

★ملاحظة★ :

يمكن دمج طريقة التجزئة مع الطريقة الخاصة (طريقة التدوير) لحل محدد من الدرجة الرابعة ..

مثال : جد قيمة المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{array}$$

$$= (1)(4)(7) + (2)(5)(2) + (3)(6)(0) - (2)(6)(7) - (1)(5)(0) - (3)(4)(2)$$

$$= (28) + (20) + (0) - (84) - (0) - (24)$$

$$= (28) + (20) - (84) - (24)$$

$$= (48) - (108) = -60$$

المدرس: سبهان حامد علي الرفاعي

حل المعادلات الخطية باستخدام طريقة التعويض

مثال : حل المعادلتين الاتيتين باستخدام طريقة التعويض

$x + 2y = -4$ —— (1)

$5x + 3y = 1$ —— (2)

الحل)

نبسط معادلة رقم (1) ثم نعوضها في معادلة رقم (2)

$x = -4 - 2y$

$5(-4 - 2y) + 3y = 1$

$-20 - 10y + 3y = 1$

$-7y = 1 + 20$

$y = -\frac{21}{7} = -3$

نعوض قيمة y في المعادلة رقم (1) لايجاد قيمة x

$x = -4 - 2y \Rightarrow x = -4 - 2(-3) \Rightarrow x = 2$

مثال : حل المعادلتين الاتيتين باستخدام طريقة التعويض

$3x - 6y = 9$ —— (1)

$9x + 12y = -3$ —— (2)

الحل)

نبسط معادلة رقم (1) ثم نعوضها في معادلة رقم (2)

$3x = 9 + 6y \Rightarrow x = 3 + 2y$

$9(3 + 2y) + 12y = -3$

$27 + 18y + 12y = -3 \Rightarrow 30y = -30$

$\therefore \quad y = -1$

بعد ايجاد قيمة y نعوضها في المعادلة رقم (1) لايجاد قيمة x

$\therefore \quad x = 1$

المعادلات الخطية :

✎**Example(1):** *Solve the linear equations*

$$x + y = 4 \qquad \cdots(1)$$
$$3x - 2y = 2 \qquad \cdots(2)$$

نضرب المعادلة (1) *3 والمعادلة (2) *-1 ينتج :

$$3x + 3y = 12 \qquad \cdots(1)$$
$$-3x + 2y = -2$$

بالجمع

$$5y = 10 \quad \Rightarrow y = \frac{10}{5} = 2$$

$$\therefore y = 2$$

نعوض عن قيمة y في المعادلة ينتج :

$$\therefore y = 2$$
$$x = 2 \quad , \quad y = 2$$

مثال: حل المعادلات الخطية التالية بالتعويض او الحذف؟

$$3x+2y=2 \text{ ——— } 1$$
$$5x+6y=4 \text{ ——— } 2$$

نضرب معادلة رقم (1) في (-5)

ونضرب معادلة رقم(2) في (3)

$$-\cancel{15}x - 10y = -10$$
$$\cancel{15}x + 18y = 12$$

بالجمع

$$8y=2 \Longrightarrow y=\frac{2}{8}$$
$$\therefore \quad y=\frac{1}{4}$$

بالتعويض في (1)

$$3x+2\left(\frac{1}{4}\right)=2$$

$$3x+\frac{1}{2}=2 \Longrightarrow 3x = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \Longrightarrow \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

حل المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كَرامر Gramer's Rule

اذا كان لدينا معادلتان فيهما متغيران x , y فطريقة الحل باستخدام قاعدة كرامير تكون باتباعنا الخطوات التالية:

1) نرتب المعدلتين على شكل مصفوفة بحيث تكون المجاهيل في جهة والحد المطلق في الجهة الاخرى.

2) نوجد قيمة محدد المعادلتين ونرمز له (△) .

3) نوجد قيمة المحدد (x△) من خلال تبديل عمود عوامل x بعمود الحدود المطلقة.

4) نوجد قيمة المحدد (y△) من خلال تبديل عمود عوامل y بعمود الحدود المطلقة.

5) نجد قيمة x , y من خلال العلاقتين

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

✎**Example** : **Find the solution of x,y by using Gramer's Rule**

استخدم قاعدة كَرامر لحل نظام المعادلات :

$$2x - 3y = 7$$
$$3x + 5y = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2*5)-(-3*3) = 19$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 38$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -19$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \Rightarrow x = \frac{38}{19} \Rightarrow x = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} \Rightarrow y = \frac{-19}{19} \Rightarrow y = -1$$

مثال : حل المعادلات التالية باسخدام المحددات (كرامير)

$$3x + 5y = 19$$
$$6x - 7y = 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = (3 \times -7) - (5 \times 6) = -21 - 30 = -51$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = (19 \times -7) - (5 \times 4) = -133 - 20 = -153$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (3 \times 4) - (19 \times 6) = 12 - 114 = -102$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \Rightarrow x = \frac{-153}{-51} \Rightarrow x = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} \Rightarrow y = \frac{-102}{-51} \Rightarrow y = 2$$

مثال : حل المعادلات التالية باسخدام المحددات (كرامير)

H. W. :

$x + 2y = 3$
$3x + 5y = 11$

الجواب: $x = 7 \ , \ y = -2$

أما اذا كان لدينا ثلاثة معادلات فيهما متغيرات x , y , z فطريقة الحل باستخدام قاعدة كرامير تكون باتباعنا الخطوات التالية:

1) نرتب المعادلات على شكل مصفوفة بحيث تكون المجاهيل في جهة والحد المطلق في الجهة الاخرى.
2) نوجد قيمة محدد المعادلات ونرمز له ($\triangle$) .
3) نوجد قيمة المحدد ($\triangle x$) من خلال تبديل عمود عوامل x بعمود الحدود المطلقة.
4) نوجد قيمة المحدد ($\triangle y$) من خلال تبديل عمود عوامل y بعمود الحدود المطلقة.
5) نجد قيمة المحدد ($\triangle z$) من خلال تبديل عمود عوامل z بعمود الحدود المطلقة.
6) نجد قيمة المتغيرات(المجاهيل) x , y , z من خلال العلاقات :

$$X = \frac{\triangle x}{\triangle} \quad , \quad y = \frac{\triangle y}{\triangle} \quad , \quad z = \frac{\triangle z}{\triangle}$$

مثال :- جد قيم (X , Y, Z) من المعادلات التالية بطريقة كرامر

$$4X + Y + Z = 5$$
$$3X + Y + 4Z = 10$$
$$X + Y + Z = 2$$

نجد قيمة المحدد الثلاثي للمعادلات بطريقة التدوير

$$\triangle = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \triangle = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\triangle = 3 + 4 + 4 - 3 - 16 - 1 \Rightarrow \triangle = -9$$

$$\triangle x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \triangle x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 1 \\ 10 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\triangle x = 10 + 8 + 5 - 10 - 20 - 2 \Rightarrow \triangle x = 23 - 32 = -9$$

$$\triangle y = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \triangle y = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 3 & 10 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\triangle y = 6 + 20 + 40 - 15 - 32 - 10$$
$$\triangle y = 66 - 57 = 9$$

$$\triangle z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Longrightarrow \triangle z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 10 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

$$\triangle z = 15 + 10 + 8 - 6 - 40 - 5$$
$$\triangle z = 33 - 51 = -18$$

$$X = \frac{\triangle x}{\triangle} = \frac{-9}{-9} = 1$$

$$Y = \frac{\triangle y}{\triangle} = \frac{9}{-9} = -1$$

$$Z = \frac{\triangle z}{\triangle} = \frac{-18}{-9} = 2$$

H. W. :

مثال : حل المعادلات التالية باستخدام المحددات (كرامير)

$$x - y + 2z = 1$$
$$2x + y - z = -2$$
$$3x + 2y + z = 3$$

الجواب : $x = -1 \;,\; y = 2 \;,\; z = 2$

المتجهات Vectors

الكميات العددية :هي الكميات التي تتحدد بذكر قيمتها فقط

الكميات الاتجاهية:هي الكميات التي تتحدد بذكر قيمتها و اتجاهها

اذا كان لدينا متجه ثلاثي في الفضاء فان

i هو متجه الوحدة باتجاه محور X

j هو متجه الوحدة باتجاه محور Y

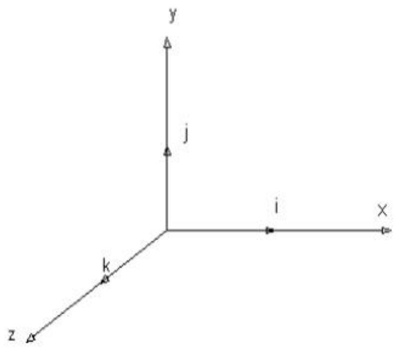
kهو متجه الوحدة باتجاه محور Z

مركبات المتجه:

اي متجه مثل$\vec{A}$ يمكن تمثيله بنقطة ابتدائية عند نقطة الاصل بنظام احداثي عمودي ,اذا فرضنا ان (A_1, A_2, A_3) هي الاحداثيات العمودية للنقطة النهائية للمتجه $\vec{A}$ عندئذ المتجهات $\left(A_{1i}, \mathrm{A}_{2\mathrm{j}}, \mathrm{A}_{3\mathrm{k}}\right)$

تسمى مركبات للمتجه$\vec{A}$ في الاتجاهات (X, Y, Z) على الترتيب بحيث يمكن كتابة المتجه $\vec{A}$

$$\vec{A} = A_{1i} + \mathrm{A}_{2\mathrm{j}} + \mathrm{A}_{3\mathrm{k}}$$



✎ **Example:**

$\bar{A} = 1i + 2j + 3k$

مقدار المتجه $\vec{A}$ هو$|A|$

$$|A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

ولمتجه الموضع او المتجه القطري r من نقطة الاصل الى النقطة $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ملاحظة: نصطلح على وحدة المتجه العمودي بالرمز $\vec{U}$وينشأ من قسمة المتجه $\vec{A}$على طوله $|A|$ حيث:

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{|A|}$$

♠♠العمليات الجبرية على المتجهات♠♠ :

الجمع والطرح .
ضرب المتجه في عدد ثابت.
إيجاد طول المتجه.
أيجاد متجه الوحدة العمودي $\bar{u}$ لمتجه واحد.
إيجاد قيمة الضرب الديكارتي Cros (x).
إيجاد قيمة متجه الوحدة العمودي $\bar{u}$ بين متجهين $\bar{u}(\bar{A},\bar{B})$.
إيجاد قيمة الزاوية (θ) بواسطة استخدام قانون Sin
إيجاد الضرب العددي (Dot) وإيجاد الزاوية (θ) بواسطة Cos

✎ **Example:**

ليكن $\vec{A},\vec{B}$ متجهين هما :

$\bar{A} = 2i + 3j + 4k$

$\bar{B} = i + j + k$

أوجد 1- $\bar{A}+\bar{B}$ -2 $\bar{A}-\bar{B}$ -3 $3\bar{B},5\bar{A}$ -4 $|\bar{B}|,|\bar{A}|$ -5 $\bar{u}(A), u(\bar{B})$

-6 $\bar{A}x\bar{B}$ -7 $|\bar{A}\,x\,\bar{B}|$ -8 $\bar{u}(\bar{A},\bar{B})$ -9 $\theta\frown\bar{A},\bar{B})$ -10 $\bar{A}.\bar{B}$

الحل: يتم جمع وطرح المتجهات من خلال المركبات المتشابهة لتلك المتجهات .

1- $\bar{A}+\bar{B}$

$$\begin{array}{l} \bar{A} = 2i + 3j + 4k \\ \bar{B} = i + j + k \\ \hline \bar{A}+\bar{B} = 3i + 4j + 5k \end{array}$$

2- $\bar{A}-\bar{B}$

$$\begin{array}{l} \bar{A} = 2i + 3j + 4k \\ \bar{B} = i + j + k \\ \hline \bar{A}-\bar{B} = 1i + 2j + 3k \end{array}$$

*** صيغة القانون**

$$\begin{array}{l} \bar{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 k \\ \bar{B} = b_1 i + b_2 j + b_3 k \\ \hline \bar{A}\pm\bar{B} = (a_1 + b_1)i \pm (a_2 + b_2)j \pm (a_3 + b_3)k \end{array}$$

ملاحظة: عند ضرب متجه في ثابت نضرب كل مركبات المتجه بذلك الثابت **3-**

*** صيغة القانون (C) هو عدد ثابت (constant)** $c\bar{A} = ca_1i + ca_2j + ca_3k$

$$5\bar{A} = (5x_2)i + (5x_3)j + (5*4)k$$
$$= 10i + 15j + 20k$$
$$3\bar{B} = 3i + 3j + 3k$$

4-

*** صيغة القانون :**

$$|\bar{A}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$$

دائماً الطول للمتجه يكون موجب اذا كان أي قيمه (-)لأن $(-)^2 = +$

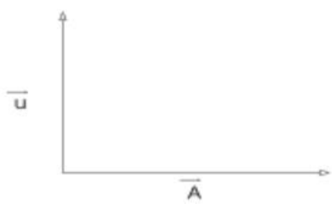
$$|\bar{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} = 5.385$$
$$|\bar{B}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} = 1.732$$

❈متجه الوحدة 5-

*** صيغة القانون :**

$$\bar{u} = \frac{\bar{A}}{|\bar{A}|} = \frac{a_1i + a_2j + a_3k}{|\bar{A}|}$$
$$= \frac{a_1}{|A|}i + \frac{a_2}{|A|}j + \frac{a_3}{|A|}k$$

$$\bar{u}(\bar{A}) = \frac{2i + 3j + 4k}{\sqrt{29}}$$
$$\bar{u}(A) = \frac{2}{\sqrt{29}}i + \frac{3}{\sqrt{29}}j + \frac{4}{\sqrt{29}}k$$



$$\bar{u}(\bar{B}) = \frac{i + j + k}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$$

6 -

❀الضرب بطريقة (cros)

❀ صيغة القانون :

$$\bar{A}x\bar{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=i\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=i(\ a_2b_3-a_3b_2)-j(\ a_1b_3-a_3b_1)+k(\ a_1b_2-a_2b_1)$$

لحل هذا المحدد نستخدم طريقة التجزئة

$$\bar{A}x\bar{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

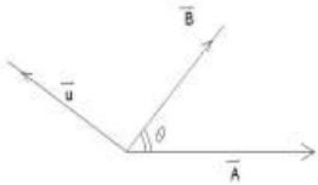
$$\bar{A}x\bar{B}=i\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=i(\ 3-4)-j(\ 2-4)+k(\ 2-3)$$

$$=-i+2j-k$$

7- $\left|\bar{A}x\bar{B}\right|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

8- $\bar{u}(\ \bar{A},\bar{B})=\dfrac{AxB}{|AxB|}$



$$\bar{u}(\ \bar{A},\bar{B})=\frac{-i+2j-k}{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{6}}i+\frac{2}{\sqrt{6}}j-\frac{1}{\sqrt{6}}k$$

9- $\theta \frown \bar{A},\bar{B})$

لاستخراج الزاوية θ حسب قانون الضرب ألاتجاهي (الديكارتي)

$$\left|\bar{A}x\bar{B}\right|=\left|\bar{A}\right|x\left|\bar{B}\right|.Sin\theta$$

$$\sqrt{6}=\sqrt{29}x\sqrt{3}.Sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29}x\sqrt{3}}=Sin\theta$$

$$Sin^{-1}.Sin\theta=Sin^{-1}(\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29}x\sqrt{3}})$$

$$\therefore\theta=Sin^{-1}(\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29}x\sqrt{3}})=Sin^{-1}(\ \frac{2.449}{9.327})$$

$$=Sin^{-1}(\ 0.2626)$$

$$\theta=15^{\circ}.22$$

10- $\bar{A}.\bar{B}$ **الضرب العددى : أي يكون الناتج دائماً عبارة عن عدد (Dot)**

$$\vec{A} = 2i + 3j + 4k$$
$$\vec{B} = i + j + k$$
$$\vec{A}.\vec{B} = (2x1) + (3x1) + (4x1)$$
$$= 2 + 3 + 4 = 9$$

لإيجاد قيمة الزاوية θ من صيغة $\vec{A}.\vec{B}$ نستخدم القانون

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| x |\vec{B}|.Cos\theta$$
$$9 = \sqrt{29} x \sqrt{3}.Cos\theta$$
$$Cos\theta = (\frac{9}{\sqrt{29} x \sqrt{3}})$$
$$\therefore Cos^{-1}.Cos\theta = Cos^{-1}(\frac{9}{\sqrt{29} x \sqrt{3}})$$
$$\theta = Cos^{-1}(\frac{9}{\sqrt{29} x \sqrt{3}}) = Cos^{-1}(\frac{9}{9.327})$$
$$\therefore \theta = Cos^{-1}(0.965) = 15° \cdot 22$$

★**إذا كان المتجهين $\vec{A},\vec{B}$ متعامدين فان الزاوية تكون 90° وتكون قيمة** $Cos(90°) = 0$

✎ **Example:** H.W.

$\bar{A} = i + j + k$

$\bar{B} = 2i - j - k$

$\bar{C} = 2i + 3j + 5k$

Find:

1- $\bar{A} + \bar{B}$ 2- $|2\bar{A} - 3\bar{C}|$ 3- $|\bar{A} x \bar{B}|$ 4- $\bar{A}.\bar{B}$ 5- $\theta(\bar{A},\bar{B})$ 6- $\bar{u}$(A,B)

Or **أثبت إن المتجهين متعامدان.**

الأعداد المركبة Complex Numbers

العدد المركب:- هو العدد الذي يتكون من جزأين حقيقي وخيالي ويكتب بصيغته العامة بالشكل التالي $z = x + iy$ حيث

x الجزأ الحقيقي للعدد المركب

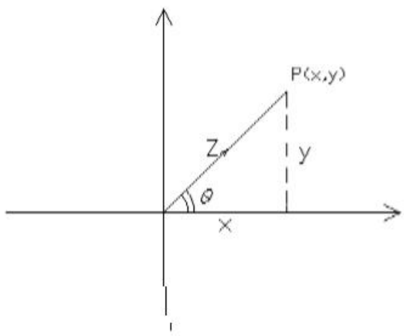
y الجزأ الخيالي للعدد المركب

i الوحدة الخيالية حيث $i = \sqrt{-1}$

$\mathrm{i}^2 = -1\,,\ \mathrm{i}^3 = i^2 * \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^2 * \mathrm{i}^2 = 1\ ,\ \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4 * i = i$

$i = -1\,,$

مثال :- ارسم العدد المركب $z = (2,3)$



$$\begin{aligned} &Z = (2,3) \\ &\therefore Z = 2 + 3j \\ &x = R(Z) = 2 \\ &y = Im(Z) = 3 \end{aligned}$$

لكي نرسم العدد المركب Z نستخرج طول Z

$$\begin{aligned} &|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &|Z| = \sqrt{2^2 + 3^2} \\ &|Z| = \sqrt{4 + 9} \\ &\therefore |Z| = \sqrt{13} \end{aligned}$$

<u>مرافق العدد المركب:-</u>

اذا كان العدد المركب $z = x + iy$ فأن مرافقه هو $\bar{z} = x - iy$

أي ان مرافق العدد المركب ينتج من عكس اشارة الجزأ الخيالي للعدد المركب فقط ويرمز له $\bar{Z}$

امثلة

$$\begin{aligned} &Z = 2 + 3i &&\rightarrow \bar{Z} = 2 - 3i \\ &Z = -1 - 4i &&\rightarrow \bar{Z} = -1 + 4i \\ &Z = 2i &&\rightarrow \bar{Z} = -2i \\ &Z = 6 &&\rightarrow \bar{Z} = 6 \end{aligned}$$

العمليات الجبرية على الأعداد المركبة بالصيغة العامة :-

1- الجمع 2- الطرح 3- الضرب 4- القسمة 5- إيجاد الطول .

✎ **Example:**

$$\text{if } Z_1 = 1 + 2i$$
$$Z_2 = 2 - i$$

$$\text{Find } 1)\ Z_1 + Z_2 \quad 2)\ Z_1 - Z_2 \quad 3)\ |2Z_1 + 3Z_2| \quad 4)\ Z_1 . Z_2$$
$$5)\ \frac{Z_1}{Z_2} \quad 6)\ \frac{1}{Z_1} \quad 7)\ \left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right)$$

$$1)\ Z_1 = 1 + 2i \qquad \text{let } Z_1 = x_1 + iy_1$$
$$Z_2 = 2 - i \qquad Z_2 = x_2 + iy_2$$
$$Z_1 + Z_2 = 3 + i \qquad Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$2)\ Z_1 = 1 + 2i$$
$$Z_2 = 2 - i$$
$$Z_1 - Z_2 = -1 + 3i \qquad \Rightarrow Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$3)\ 2Z_1 = 2 + 4i$$
$$3Z_2 = 6 - 3i$$
$$2Z_1 + 3Z_2 = 8 + i$$
$$|2Z_1 + 3Z_2| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65} \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$4)\ Z_1 . Z_2 = (1 + 2i)(2 - i)$$
$$= 2 - i + a4i - 2i^2 \quad \rightarrow i^2 = -1$$
$$= 2 + 3i + 2$$
$$= 4 + 3ia$$

صيغة القانون

$$Z_1 . Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1 . x_2 + ix_1 . y_2 + ix_2 y_1 + y_1 . y_2 . i^2$$
$$= x_1 . x_2 - y_1 . y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$\therefore Z_1 . Z_2 = 4 + 3i \rightarrow \text{Conjugat} \quad \rightarrow \text{Conjugat}\ \overline{Z_1 . Z_2} = 4 - 3i$$

$$5)\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{1+2i}{2-i}$$

∴ للتخلص من الكسر نضرب بمرافق المقام $\overline{Z_2}=2+i$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(1+2i)}{(2-i)}*\frac{(2+i)}{(2+i)}=\frac{2+4i+i+2i^2}{4-2i+2i-i^2}$$

$$=\frac{2-2+4i+i}{4+1}=\frac{5i}{5}=i$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2}=i \quad \rightarrow Re(Z)=0 \ , \ Im(Z)=1$$

$$6)\frac{1}{Z_1}=\frac{1}{(1+2i)}*\frac{(1-2i)}{(1-2i)}$$

$$=\frac{1-2i}{1+4}=\frac{1-2i}{5}$$

$$\therefore \frac{1}{Z_1}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i \quad \Rightarrow Re(Z)=\frac{1}{5} \quad Im(Z)=\frac{-2}{5}$$

$$7)\left(\frac{\overline{Z_1}}{Z_2}\right)=-i$$

صيغة القانون:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \quad \text{if } Z_2\neq 0$$

$$\overline{Z_2}=x_2-iy_2$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)}*\frac{(x_2-iy_2)}{(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2.x_1y_2)}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}.$$

Prove that

$$\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}=1+i$$

$$\Rightarrow 3i^{30}-i^{19}=3(-1)-(-i)=-3+i$$

$$\Rightarrow \frac{-3+i}{2i-1}=\frac{-3+i}{2i-1}*\frac{(-2i-1)}{(-2i-1)}$$

$$=\frac{6i+3-2i^2-i}{-4i^2-2i+2i+1}=\frac{5i+3+2}{4+1}=\frac{5i+5}{5}$$

$$=\frac{5}{5}(i+1)=1+i$$

ملاحظة:

⋆ إذا كان الأسس عدد زوجي فأن النتائج أما -1 أو +1

$$i^{30}=(i^2)^{15}=(-1)^{15}=-1$$

$$i^{100}=(i^2)^{50}=(-1)^{50}=+1$$

⋆⋆ أما إذا كان الأسس عدد فردياً فأن النتائج -i أو +i

$$i^{19}=i.i^{18}=i(i^2)^9=i(-1)^9=-i$$

$$i^{17}=i.i^{16}=i(i^2)^8=i(-1)^8=i$$

✎ **Example:** *Find Re(Z) and Im(Z)* بسط العدد المركب مع كتابة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي

$$1-Z_1=i^7-3i^2$$

$$Z_1=i(i)^6-3(-1)$$

$$=i(i^2)^3+3$$

$$=i(-1)^3+3$$

$$=-i+3\Rightarrow Re(Z_1)=3\qquad Im(Z_1)=-1$$

$$2-Z_2=i^{17}$$

$$Z_2=i(i^2)^8=i(-1)^8=i\Rightarrow Re(Z_2)=0,\quad Im(Z_2)=1$$

H.W.

1− let $Z_1=2+3i$

$Z_2=4+5i$

Find 1) Z_1+Z_2 2) $|3Z_1-2Z_2|$ 3) $Z_1.Z_2$ 4) $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

2− let $Z_1=5+3i$

$Z_2=-2+7i$

Find 1) Z_1+Z_2 2) $|3Z_1-2Z_2|$ 3) $Z_1.Z_2$ 4) $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

3− $Z_3=5i^{70}$ *Find Re(Z) and Im(Z)*

4− $Z_4=1+i^{15}$ *Find Re(Z) and Im(Z)*

5 - أثبت أن :

$$\frac{3+4i^{30}}{2+i}=\frac{-2}{5}+\frac{i}{5}$$

★صيغ كتابة العدد المركب :

1-صيغة المحاور المتعامدة أو (الصيغة العامة Rectangular)

$Z = x + yi$

2-الصيغة المثلثية (Traingular)

$Z = r\{\ Cos\theta + iSin\theta`$

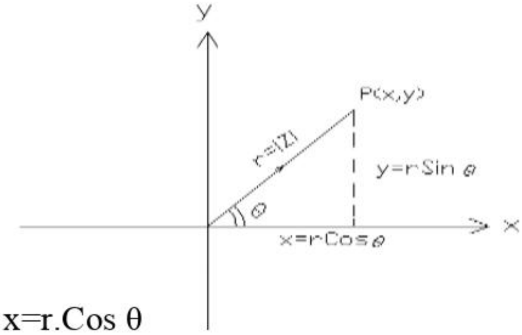
3- الصيغة الأسية (Exponential)

أو صيغة أويلر

$Z = re^{i\theta}$

4- الصيغة القطبية (Polar) $Z = r|\underline{\theta}$

لتحويل العدد المركب الى الصيغة القطبية من الصيغة الجبرية



من الشكل نلاحظ $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$Z = x + iy$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \longrightarrow x = r.\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \longrightarrow y = r.\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$x = r\ Cos\theta \quad , \quad y = r\ Sin\vartheta$

$\therefore Z = x + iy$

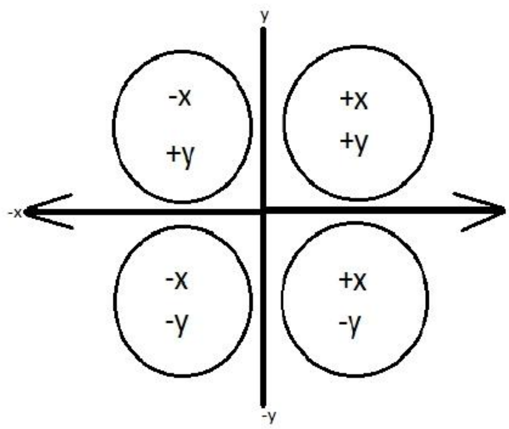
$Z = r Cos\theta + irSin\theta$

$= r[Cos\theta + iSin\theta]$ الصيغة المثلثية

$Z = re^{i\theta}$ الصيغة الآسية

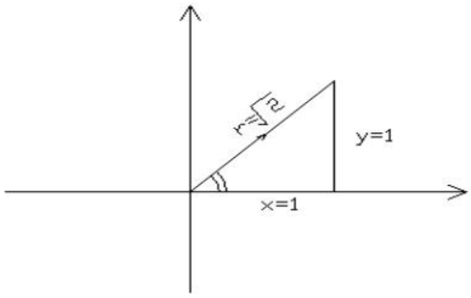
$Z = r|\underline{\theta}$ الصيغة القطبية

ان الزاوية Θ تبدأ من محور (x) الموجب وتتجه عكس اتجاه عقرب الساعة منتهية بمتجه العدد المركب لاحظ الشكل التالي الخاص بالعدد المركب في حالة المحاور المتعامدة



امثلة على تحويل صيغة العدد المركب من عامة القطبية وبالعكس

مثال: حول العدد المركب من الصيغة الجبرية الى القطبية



$Z = 1 + i$

$x = 1 \;\; , y = 1$

$r = |Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$Cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \theta = 45^\circ$

∴ **الزاوية تقع في الربع الأول لا تحتاج الى زاوية متممة .**

$\therefore Z = r(\; Cos\theta + i\, Sin\theta)$

الصيغة المثلثية $= \sqrt{2}(\; Cos45^\circ + i\, Sin45^\circ)$

$Z = re^{i\theta}$

الاسية $Z = \sqrt{2}e^{i45}$

القطبية $Z = \sqrt{2}\;\; \underline{|45^\circ}$

مثال حول الصيغة العامة للعدد المركب الى الصيغة القطبية

$Z = 3 + 4i$

r = $\sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25}$

$r = 5$

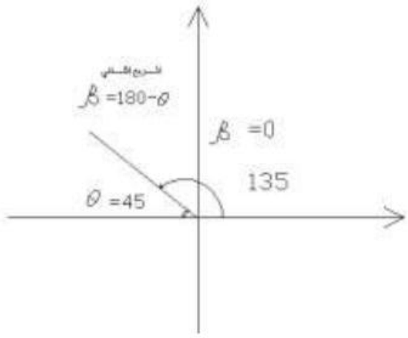
$tan\Theta = \dfrac{y}{X} = \dfrac{4}{3}$

$\Theta = tan - 1\,\dfrac{4}{3}$

$\Theta = 53\,.13$

$z = 5\; L53\,.13$

مثال :اكتب العدد بالصيغة القطبية و الأسية .



$$Z = -5 + 5i \Rightarrow x = -5 \ , y = 5$$

$$r = |Z| = \sqrt{5^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{50} + \sqrt{25x2} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-5}{5} = -1 \qquad \Rightarrow \theta = -45^\circ$$

∴ يجب إيجاد الزاوية المتممة في الربع الثاني .

$$\beta = 180 - \theta$$

$$\beta = 180 - 45 = 135^\circ$$

$$\therefore Z = 5\sqrt{2}(\ Cos135^\circ + i\ Sin135^\circ\ )$$

$$Z = 5\sqrt{2}\ e^{i\,135}$$

$$Z = 5\sqrt{2}\ \underline{|135^\circ}$$

مثال :حول العدد من الصيغة المثلثية الى الصيغة الجبرية .

$$\therefore Z = 2\sqrt{2}(\ Cos45^\circ + i\ Sin45^\circ\ )$$

$$\Rightarrow\ r = 2\sqrt{2} \qquad \theta = 45^\circ$$

$x = r\,Cos\theta$ $\qquad$ $y = r\,Sin\theta$

$x = 2\sqrt{2}\ Cos45^\circ$ $\qquad$ $y = 2\sqrt{2}\ Sin45^\circ$

$x = 2\sqrt{2}\ .\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $y = 2\sqrt{2}\ .\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = 2$ $\qquad$ $y = 2$

$$\therefore Z = 2 + 2i$$

1) H.W. $Z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$ **اكتب العدد بالصيغة القطبية والأسية**

2) H.W. $Z = -3i$ **اكتب العدد بالصيغة القطبية**