الفصل الاول

الانظمة العددية

1.1 مقدمة:

يعد استخدام الارقام كوسيلة للعد والحساب من الانجازات الهامة التي حققها الانسان عبر التاريخ والتي ساهمت في تسهيل كافة العمليات الحسابية وتسريعها. فقد استخدم الانسان منذ القدم الكثير من الادوات لتمثيل عمليات العد والحساب ومنها استخدامه لاصابع يده العشرة والتي كانت الاساس للنظام العددي والذي لايزال معمول به حتى يومنا هذا والمسمى **بالنظام العشري**.

في المراحل الدراسية السابقة وعند دراستك للنظام العشري لابد انك لاحظت ان القيمة الحقيقية للرقم تعتمد على قيمته المكانية في العدد، وهذا يعني ان الرقم يمكن ان ياخذ اكثر من قيمة والذي يحدد ذلك مكانه داخل العدد (والذي يسمى بالمرتبة)، تزداد قيمة العدد اذا كانت حركته باتجاه اليسار وتقل قيمته اذا كانت حركته باتجاه اليمين. فمثلا العدد (937) نجد ان القيمة الحقيقية للرقم 7 هي سبعة فقط اما قيمة الرقم 3 فهي (30) وقيمة الرقم 9 هي (900).

وهناللك انظمة عددية اخرى غير النظام العشري واكثرها شيوعا هي **النظام الثنائي، النظام الثماني النظام السادس عشري** وتكون هذه الانظمة مفيدة في الانظمة الرقمية مثل الحاسبات الالكترونية المعالجات الدقيقة وغيرها من الانظمة الرقمية ولهذا السبب فانه من الضروري الاطلاع على كل من هذه الانظمة العددية لغرض استخدامها في دراستنا للانظمة الرقمية.

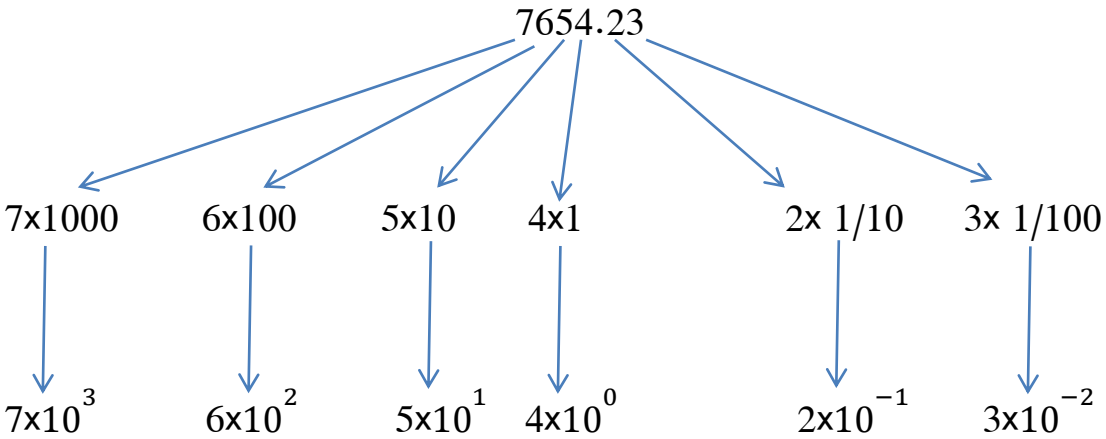
2.1 النظام العشري:

وهو النظام العددي المتعارف عليه في كافة المجالات وفي كل انحاء العالم وجاءت تسمية النظام ب(العشري) لان عدد الرموز الداخلة في تركيبة اي عدد في هذا النظام هي عشرة رموز وهي (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) وفي حالة استخدام اكثر من رمز فان القيمة العددية تعتمد على موقع الرمز ضمن سلسلة الرموز ، ان عدد الرموز الداخلة في تركيب النظام العددي تسمى **بأساس النظام**

لذلك فان اساس النظام العشري هو العدد(**10**) وسمي بأساس العدد لان كل عدد مكتوب بهذا النظام يعتمد بالاساس على هذا العدد.

مثال:

العدد العشري (7654.23) يمكن تحليله الى المراتب التالية:



3.1 النظام الثنائي:

وهو نظام عددي اساسه (2) مقارنة بالنظام العشري الذي اساسه العدد(10) اي ان عدد الرموز المستخدمة في النظام هي رمزين فقط وهي (0,1) لتمثيل كافة الاعداد. ويعتبر النظام الثنائي اساس اللغةالتي تتعامل بها الحاسبة الالكترونية والانظمة الرقمية مثال على اعداد في هذا النظام:

0.1011 101.1101 10111.101 1001

من خلال ملاحظتنا الاعداد اعلاه نلاحظ بان الاعداد بالنظام الثنائي ولكن توجد اعداد شبيهة بها في النظام العشري، فلتمييز العدد المكتوب بالنظام المعين، تكتب الاعداد داخل اقواس مع كتابة رمز اسفل القوس يمثل اساس النظام المكتوب به العدد.

فمثلا: العدد110 يكتب بالثنائي $(110)_2$ وبالعشري يكتب$(110)_{10}$

مثال: لتحليل العدد الى مراتبه $(110.101)_2$

$$(110.101)_2 = 0 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^{-1} + 0 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3}$$

4.1 النظام الثماني:

وهو من الانظمة المستخدمة في الحاسبات الالكترونية اساسه العدد(8) الرموز المستخدمة في هذا النظام هي (0,1,2,3,4,5,6,7) ومثال على اعداد هذا النظام:

$(110.013)_8$ $(721.5)_8$ $(203.62)_8$ $(0.513)_8$

مثال: لتحليل العدد الى مراتبه $(203.65)_8$

$$(203.65)_2 = 3 * 8^0 + 0 * 8^1 + 2 * 8^2 + 6 * 8^{-1} + 5 * 8^{-2}$$

5.1النظام السادس عشري:

وهو من الانظمة المهمة المستخدمة في الحاسبات الالكترونية اساسه العدد(16) اي ان عدد الرموز المستخدمة في تشكيل هذا النظام هي 16 رمز وهي:

(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ,A,B,C,D,E,F)

ومثال على اعداد هذا النظام:

$(2D6.F3)_{16}$ $(10011.1)_{16}$ $(FFF)_{16}$ $(0.257)_{16}$

مثال: لتحليل العدد الى مراتبه $(3A1.7F)_{16}$

$$(3A1.7F)_2 = 1 * 16^0 + 10 * 16^1 + 3 * 16^2 + 7 * 16^{-1} + 15 * 16^{-2}$$

التحويلات بين الانظمة العددية

ان عملية التحويل بين الانظمة العددية من العمليات المهمة والتي يجب ان يتعرف عليها الشخص الذي يدرس عملية تصميم الانظمة الرقمية. ولتسهيل عملية فهم هذه التحويلات سيتم تقسيمها الى مجاميع كل مجموعة تتشابه بطريقة التحويل

التحويل من الانظمة الغير عشرية الى النظام العشري

لتحويل اي عدد من اي نظام عددي الى النظام العشري يتم تحليل العدد الى مراتبه اعتمادا على اساس ذلك النظام ثم ايجاد ناتج جمع الحدود، والعدد الناتج من الجمع سيكون هو العدد في النظام العشري.

مثال: حول العدد $(1101.01)_2$ الى النظام العشري

$$1101.01_2 = 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3 + 0 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2}$$

$$= 1 * 1 + 0 * 2 + 1 * 4 + 1 * 8 + 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{4}$$

$$= 1 \quad + 0 \quad + 4 \quad + \ 8 \quad + 0 \quad + 0.25$$

$$= (13.25)_{10}$$

مثال: حول العدد $(125.4)_8$ الى النظام العشري:

$$125.4_8 = 5 * 8^0 + 2 * 8^1 + 1 * 8^2 + 4 * 8^{-1}$$

$$= 5 * 1 + 2 * 8 + 1 * 64 + 4 * 1/8$$

$$= 5 \quad + 16 \quad + 64 \quad + \ 0.5$$

$$= (85.5)_{10}$$

مثال: حول العدد $(A15.C)_{16}$ الى النظام العشري

$$A15.C_{16} = 5 * 16^0 + 1 * 16^1 + 10 * 16^2 + 12 * 16^{-1}$$
$$= 5 * 1 + 1 * 16 + 10 * 256 + 12 * 1/16$$
$$= 5 \quad + 16 \quad + 2560 \quad + \ 0.75$$
$$= (2581.75)_{10}$$

التحويل من النظام العشري الى الانظمة الاخرى

لتحويل اي عدد عشري الى اي نظام اخر يجب تجزئته الى جزء صحيح وجزء كسري وتحويل كل جزء بطريقة خاصة ثم جمع ناتج التحويل للجزئين للحصول على الناتج النهائي

اولا: تحويل الجزء الصحيح

لتحويل الجزء الصحيح للعدد العشري لاي نظام نقوم بتقسيم العدد العشري على اساس النظام المطلوب التحويل اليه ونحتفظ بباقي القسمة، ثم ناخذ ناتج القسمة ونقسمه مرة اخرى على اساس النظام ونحتفظ بالباقي وهكذا نستمر بتكرار العملية الى ان نحصل على ناتج قسمة يساوي صفر. فيكون ناتج التحويل في عمود باقي القسمة بقرائته من الاسفل الى الاعلى وكتابته من اليسار الى اليمين

ثانيا تحويل الجزء الكسري

لتحويل الجزء الكسري من العدد العشري الى نظيره في الانظمة الاخرى نقوم بضرب العدد الكسري في اساس النظام المطلوب التحويل اليه ثم اخذ الجزء الكسري فقط من ناتج الضرب وضربه مرة اخرى في الاساس وهكذا تستمر عملية الضرب الى ان نتوقف في احدى الحالات التالية:

اما ان يكون الجزء الكسري الناتج في الضرب =صفر

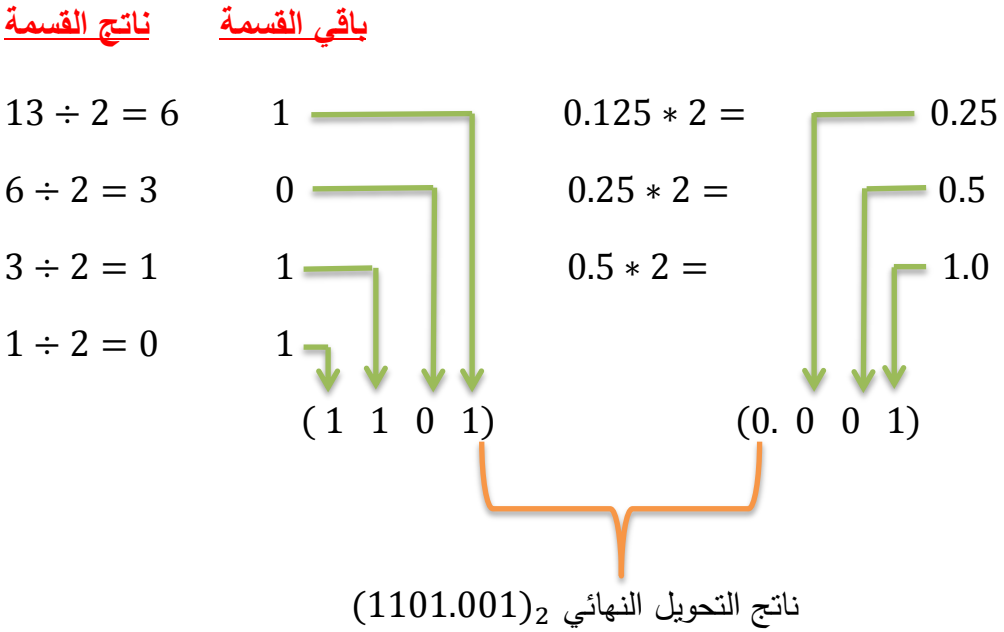
تكرار الجزء الكسري اكثرمن مرة (في هذه الحالة يكون ناتج التحويل تقريبي)

تعقيد الجزء الكسري اكثر مع استمرار عملية الضرب (ايضا في هذه الحالة يكون ناتج التحويل تقريبي)

بعدتوقف عملية الضرب يتم قراءة ناتج التحويل في عمود الجزء الصحيح من الضرب بقراءته من الاعلى الى الاسفل وكتابته بعدالفارزة من اليسار الى اليمين

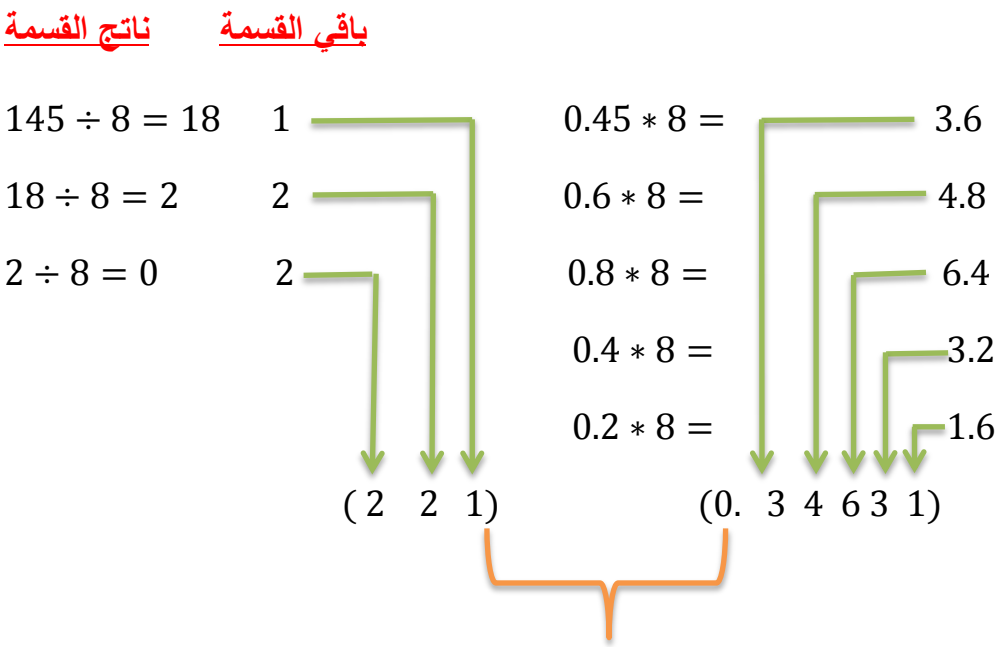
.

مثال1: حول العدد $(13.125)_{10}$ الى النظام الثنائي



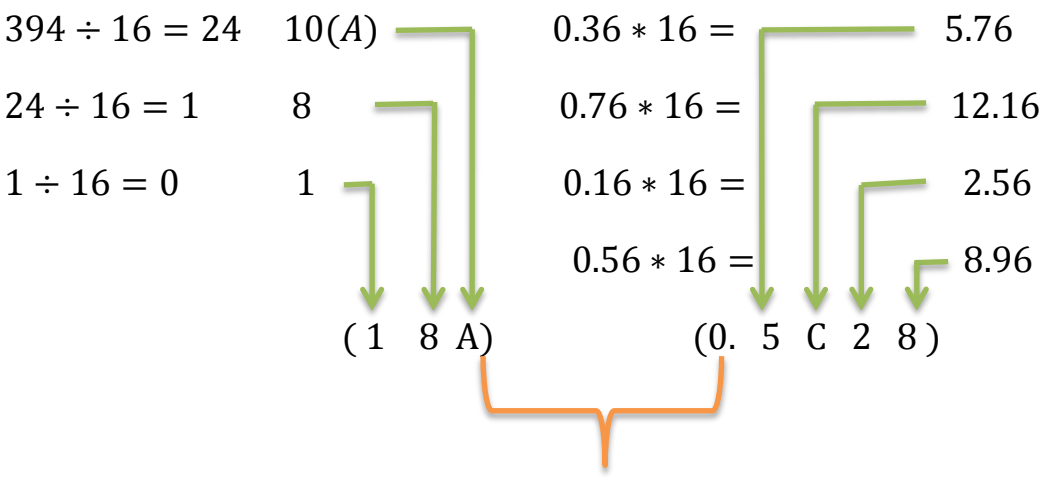
ناتج التحويل النهائي $(1101.001)_2$

مثال2: حول العدد $(145.45)_{10}$ الى النظام الثماني



ناتج التحويل النهائي $(221.34631)_8$

مثال3: حول العدد $(394.36)_{10}$ الى السادس عشر



ناتج التحويل النهائي $(18A.5C28)_{16}$

3.6.1التحويل من النظام الثنائي الى الثماني وبالعكس

لتحويل العدد من النظام الثنائي الى الثماني يقسم العدد الثنائي الى مجاميع من ثلاثة مراتب ابتداءا من الفارزة باتجاه اليسار للجزء الصحيح وباتجاه اليمين للجزء الكسري واذا انتهت الاطراف بمراتب اقل من ثلاثة تكمل باصفار ثم تحول كل مجموعة ثلاثية في النظام الثنائي الى مايقابلها في النظام الثماني كمافي الجدول ادناه والعدد الناتج هو العدد بالنظام الثماني

الثماني	الثنائي		
	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

مثال: حول العدد الى النظام الثماني $(11010111.110)_2$ الى النظام الثماني:

011 010 111 . 110 100

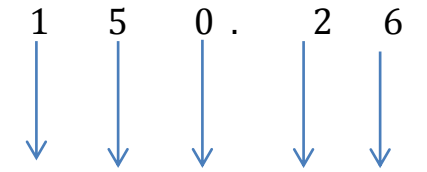
3 2 7 6 4

$$11010111.110_2 = 327.64_8$$

ولتحويل اي عدد من النظام الثماني الى الثنائي فتكون العملية عكسية نسبة للتحويل السابق حيث يحول كل رمز ثماني الى مايعادله في النظام الثنائي من ثلاثة رموز وحسب الجدول السابق ثم

نحذف الاصفار التي في الطرف الايمن من الجزء الكسري والطرف الايسر من الجزء الصحيح من التحويل ان وجدت والعدد الباقي هو ناتج التحويل.

مثال: حول العدد $(150.26)_8$ الى النظام الثنائي



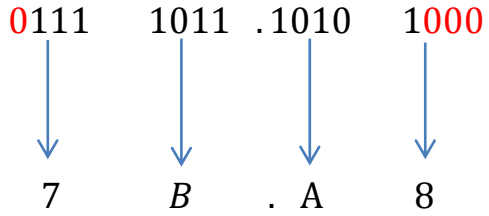
$$150.26_8 = 1101000.01011_2$$

4.6.1التحويل من النظام الثنائي الى السادس عشر وبالعكس

ان التحويل بين النظام السادس عشر والثنائي هو شبيه بطريقة التحويل الثنائي والثماني الفرق فقط هو ان المجاميع الثنائية في التحويل هي اربعة مراتب وجدول التحويل مبين ادناه.

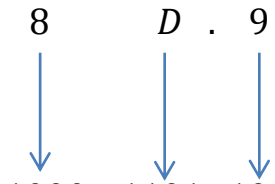
السادس عشري	الثنائي			
	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A	1	0	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	1
E	1	1	1	0
F	1	1	1	1

مثال: حول العدد $(1111011.10101)_2$ الى النظام السادس عشري



$$1111011.10101_2 = 7B.A8_{16}$$

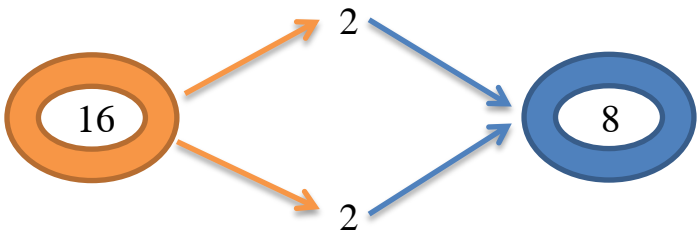
مثال: حول العدد $(8D.9)_{16}$ الى النظام الثنائي



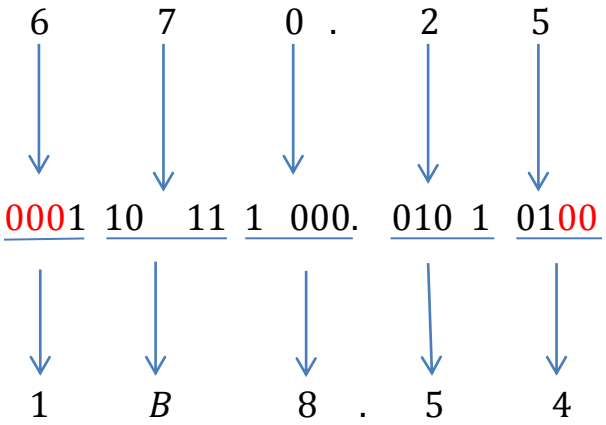
$$8D.9_{16} = 10001101.1001_2$$

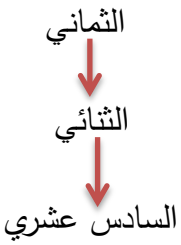
5.6.1. التحويل من النظام الثماني الى السادس عشر وبالعكس

للتحويل بين النظام الثماني والسادس عشري يتم الاستفادة من التحويلات السابقة لانجاز التحويل النهائي. فمثلا اذا اردنا التحويل من الثماني الى السادس عشري يتم تحويل الثماني الى الثنائي ومن ثم تحويل الثنائي (الناتج) الى السادس عشري والعكس صحيح



مثال:حول العدد 670.25_8 الى النظام السادس عشري





$$670.25_8 = 1B8.54_{16}$$

تمارين:

1.حول العدد 82.01_2 الى النظام الثنائي

2. حول العدد 540.12_{10} الى النظام الثماني

3. حول العدد 260.48_{10} الى النظام السادس عشري

4. حول العدد 101101.001_2 الى النظام العشري

5. حول العدد $17E.2A_{16}$ الى النظام الثماني

اوجد قيمة (X) في كل مما يلي:

$$(X)_8 = 35.875_{10} \qquad (X)_{16} = 10001010.101_2 \qquad (X)_{10} = 804.1C_{16}$$

العمليات الحسابية في النظام الثنائي

كلناتعلم العمليات الحسابية التي تتم باستخدام الاعداد العشرية مثل الجمع والضرب والطرح والقسمة في المراحل الدراسية السابقة كل هذه العمليات يمكن اجرائها ايضا في الانظمة العددية الاخرى ولاهمية النظام الثنائي في دراستنا لموضوع الدوائر الرقمية فسنقوم بدراسة تلك العمليات الحسابية في النظام الثنائي.

1.7.1 الجمع في النظام الثنائي

ان ابسط عملية جمع في النظام الثنائي هي التي تتم بين عددين كل عدد يتكون من رمز (مرتبة) ثنائي واحد. ولو اخذنا كافة الاحتمالات لهذه العملية فستكون الاحتمالات المبينة في ادناه وبالاعتماد على هذه الاحتمالات يكن تنفيذ اي عملية جمع ثنائية لاي عدد من المراتب

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 0 \rightarrow 1 \quad (carry)$ محمل

مثال: اجمع العددين $(11010.1)_2$ $(1011.01)_2$

$$\begin{array}{r} \mathbf{1\quad\ 1} \\ \mathbf{1\ 1\ 0\ 1\ 0.1\ 0} \\ \mathbf{0\ 1\ 0\ 1\ 1.0\ 1} + \\ \hline \mathbf{1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1.1\ 1} \end{array}$$

مثال: اجمع العددين $(11011.101)_2$ $(1110.11)_2$

$$\begin{array}{r} 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ .\ 1\ \ 0\ \ 1 \\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ .\ 1\ \ 1\ \ 0 \quad + \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ 0\ .\ 0\ 1\ \ 1 \end{array}$$

ملاحظة: ناتج 1+1+1=1 ⟵ 1 محمل

2.7.1 الطرح في النظام الثنائي (الطريقة المباشرة):

كمافي عملية الجمع تكون احتمالات ابسط عملية طرح بين عددين ثنائيين وهي اربع احتمالات كمامبينة ادناه:

$0 - 0 = 0$

$0 - 1 = 1 \rightarrow 1$ استعارة$(borrow)$

$1 - 0 = 1$

$1 - 1 = 0$

مثال: اطرح العدد $(1011)_2$ من العدد $(1101.1)_2$

$$\begin{array}{r} \text{استعارة} \\ 1\ \ \cancel{1}\ \ 0\ \ 1\ .\ 1 \\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ .\ 0 \quad - \\ \hline 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ .\ 1 \end{array}$$

تمرين/ اطرح العدد $(110.1)_2$ من العدد $(1000.01)_2$

3.7.1 الضرب في النظام الثنائي:

ان احتمالات عملية الضرب في النظام الثنائي هي:

$0 * 0 = 0$

$0 * 1 = 0$

$1 * 0 = 0$

$1 * 1 = 1$

مثال: اوجد ناتج ضرب العددين $(101)_2$, $(1010)_2$

	1	**0**	**1**	**0**	
		1	**0**	**1**	**x**
	1	**0**	**1**	**0**	
0	**0**	**0**	**0**	**0**	
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**

3.7.1 القسمة في النظام الثنائي: ان احتمالات القسمة في النظام الثنائي هي

$0 \div 0 = ؟$

$0 \div 1 = 0$

$1 \div 0 = ؟$

$1 \div 1 = 1$

مثال: اوجد ناتج قسمة العدد $(11000)_2$ العدد على $(100)_2$

```
      1 1 0
   ┌──────
100 | 1 1 0 0 0
    - 1 0 0
    ---------
      0 1 0 0
    -   1 0 0
    ---------
      0 0 0 0
```

المتممات

يستخدم مفهوم المتممات في الحاسبة في خزن الاعداد السالبة وسنبين ذلك في المواضيع القادمة والاستخدام الثاني هوللتعويض عن عملية الطرح بعملية جمع متكرر والذي يؤدي بدوره الى جعل الدوائر الالكترونية المسؤولة عن عملية الجمع بتنفيذ عملية الطرح مع بعض الاضافات للدائرة

المتممات في النظام الثنائي:

هنالك نوعان من المتممات في النظام الثنائي

اولا: المتمم ل1 : مقلوب العدد (اي جعل كل واحد صفر وكل صفر واحد)

ثانيا: المتمم ل2: هو المتمم ل1 مضافا اليه 1

مثال:

العدد	المتمم ل1	المتمم ل
110111	001000	001001
10010	01101	01110

2.8.1 الطرح الثنائي باستخدام المتممات

اولا الطرح باستخدام المتمم ل1 :

لطرح عددين باستخدام المتمم ل1 نتبع الخطوات التالية:

1)اكمال مراتب العدد الاقل عددا بالمراتب (المطروح او المطروح منه)
2) ايجاد المتمم ل1 للعدد المطروح
3) جمع المتمم ل1 للمطروح مع المطروح منه
4) نلاحظ نتيجة الجمع للخطوة 3 وكمايلي:

أ- اذاكان هنالك واحد ظاهر في المرتبة الاضافية فنقوم بجمعه مع بقية العدد والناتج من عملية الجمع هو ناتج الطرح ويكون موجب

ب- اذا لم يظهر واحد في المرتبة الاضافية (وهو دلالة ان ناتج الطرح سالب) ويكون ناتج الطرح باخذ المتمم ل1 لناتج الخطوة 3 ويكون ناتج العملية هو ناتج الطرح ويكون سالب

مثال: اطرح العدد من العدد باستخدام طريقة المتمم ل1:

1 0 1 0

1 1 0 –

الخطوة الاولى: نكمل مراتب العدد الاقل وهو المطروح (110) تصبح اربعة مراتب (باضافة صفر) اي تصبح (0110)

الخطوة الثانية: نجد المتمم الاول للمطروح (0110) ← (1001)

الخطوة الثالثة: نجمع المتمم ل1 للمطروح مع المطروح منه

1 0 0 1 **المتمم ل1 للمطروح**

1 0 1 0 + **المطروح منه**

---

1 0 0 1 1

1 +

المرتبة الاضافية

---

0 1 0 0

الناتج النهائي للطرح

مثال: اطرح العدد من العدد باستخدام طريقة المتمم ل1:

1 0 1 1

1 0 1 0 1 –

الخطوة الاولى: نكمل مراتب العدد الاقل وهو المطروح منه (1011) تصبح اربعة مراتب (باضافة صفر) اي تصبح (01011)

الخطوة الثانية: نجد المتمم الاول للمطروح (10101) ← (01010)

الخطوة الثالثة: نجمع المتمم ل1 للمطروح مع المطروح منه

0 1 0 1 0 **المتمم ل1 للمطروح**

1 1 0 1 1 + **المطروح منه**

؟ 1 0 1 0 1

المرتبة الاضافية خالية اذن سنجد المتتمم ل1 للناتج

الناتج النهائي للطرح

0 1 0 1 0

ثانيا الطرح باستخدام المتمم ل2 :

لطرح عددين باستخدام المتمم ل2 نتبع الخطوات التالية:

1)اكمال مراتب العدد الاقل عددا بالمراتب (المطروح او المطروح منه)
2) ايجاد المتمم ل2 للعدد المطروح
3) جمع المتمم ل2 للمطروح مع المطروح منه
4) نلاحظ نتيجة الجمع للخطوة 3 وكمايلي:
أ- اذاكان هنالك واحد ظاهر في المرتبة الاضافية فنقوم بحذف الواحد والباقي يكون هو ناتج الطرح ويكون موجب
ب- اذا لم يظهر واحد في المرتبة الاضافية (وهو دلالة ان ناتج الطرح سالب) ويكون ناتج الطرح باخذ المتمم ل2 لناتج الجمع ويكون سالب

مثال1: اطرح العدد (110)من العدد(1110) باستخدام طريقة المتمم ل2:

1 1 1 0

1 1 0 –

الخطوة الاولى: نكمل مراتب العدد الاقل وهو المطروح (110) تصبح اربعة مراتب (باضافة صفر) اي تصبح (0110)

الخطوة الثانية: لايجاد المتمم الثاني اولا سنجد المتمم الاول للمطروح (0110) ← (1001) ثم سنجمعه مع الرقم واحد وبذلك نكون قد وجدنا المتمم الثاني للمطروح

المتمم ل2 للمطروح

1
1 0 0 1

1 +

---

1 0 1 0

الخطوة الثالثة: نجمع المتمم ل2 للمطروح مع المطروح منه

المتمم ل2 للمطروح 1 0 1 0

المطروح منه 1 1 1 0 +

1 1 0 0 0

المرتبة الاضافية تحذف

الناتج النهائي للطرح (1000)

مثال2: اطرح العدد (11101)من العدد(1011) باستخدام طريقة المتمم ل2:

1 0 1 1

1 1 1 0 1 –

الخطوة الاولى: نكمل مراتب العدد الاقل وهو المطروح منه (1011) تصبح خمسة مراتب (باضافة صفر) اي تصبح (01011)

الخطوة الثانية: لايجاد المتمم الثاني اولا سنجد المتمم الاول للمطروح (11101) ← (00010)

ثم سنجمعه مع الرقم واحد وبذلك نكون قد وجدنا المتمم الثاني للمطروح

المتمم ل2 للمطروح 0 0 0 1 0

1 +

0 0 0 1 1

الخطوة الثالثة: نجمع المتمم ل2 للمطروح مع المطروح منه

0 0 0 1 1 **المتمم ل2 للمطروح**

0 1 0 1 1 + **المطروح منه**

---

0 1 1 1 0

لايوجد مرتبة اضافية

بماانه لايوجد مرتبة اضافية اذن سناخذ المتمم ل2 للناتج وذلك باخذ المتمم الاول للناتج (وذلك بقلب كل واحد صفر وكل صفر واحد) ثم نجمع النتيجة مع الواحد وبذلك نكون وجدنا المتمم ل2

1 0 0 0 1 **المتمم ل2 للمطروح**

1 +

---

1 0 0 1 0

الناتج النهائي هو (-10010)

الفصل الثانى

البوابات المنطقية والجبر البوليني

يمكن تعريف البوابة المطقية (logic circuit):

بانها دوائر الكترونية لها ادخال واحد او اكثر واخراج واحد تستخدم لتمثيل بعض الدوال المنطقية التي يمكن صياغتها باستخدام قوانين الجبر البوليني (الجبر المنطقي)

البوابات الاساسية (Basic gates):

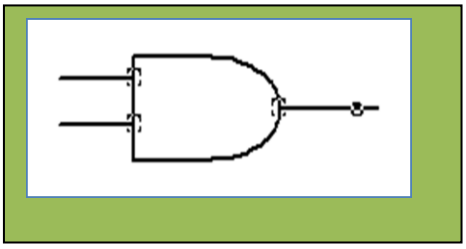
1-بوابة (AND gate):

وهي بوابة لها ادخالين او اكثر واخراج واحد تعمل على اساس ان اخراج البوابة يكون على منطق (1) عندما تكون جميع الادخالات على منطق (1) وفي خلاف ذلك يكون الاخراج على منطق (0).

ملاحظة: منطق (0) ومنطق (1) هي قيم منطقية يمكن اعطائها الى المتغيرات المنطقية في الحسابات النظرية لكن في الحالة العملية يمكن تمثيلها بشكل فولتيات مثلا:

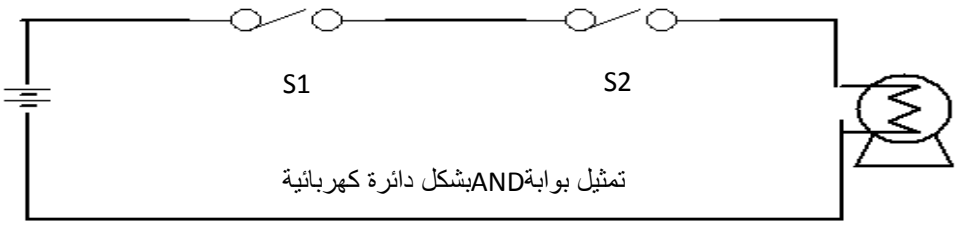
منطق (0)= 0فولت ، منطق (1)=(+12فولت) او (+5فولت)

الرمز المنطقي الصيغة المنطقية جدول الحقيقة



Y= A . B

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



تمثيل بوابةANDبشكل دائرة كهربائية

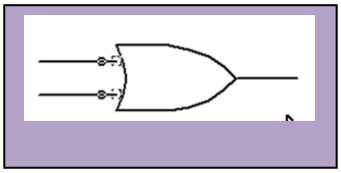
مصباح LED

S1	S2	L
OFF	OFF	OFF
OFF	ON	OFF
ON	OFF	OFF
ON	ON	ON

2-بوابة (OR gate):

وهي بوابة لها ادخالين او اكثر واخراج واحد تعمل على اساس ان اخراج البوابة يكون على منطق (1) عندما تكون احد الادخالات على الاقل او جميعها على منطق (1) وفي خلاف ذلك يكون الاخراج على منطق (0).

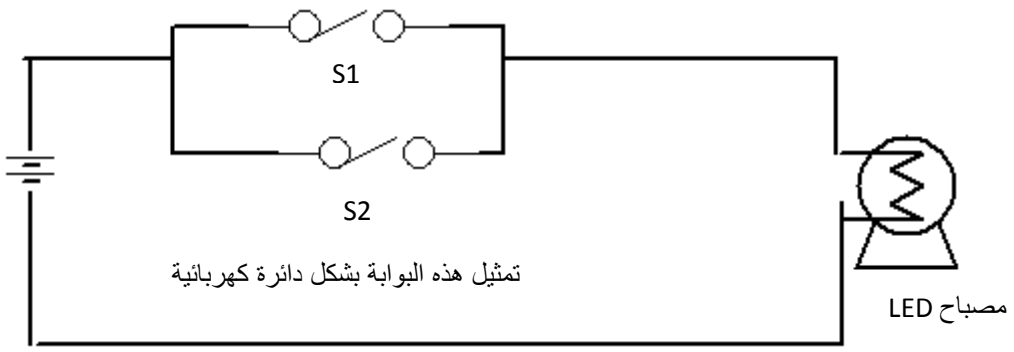
الرمز المنطقي | الصيغة المنطقية | جدول الحقيقة



Y= A + B

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

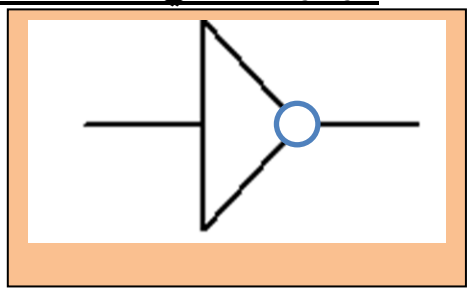
S1	S2	L
OFF	OFF	OFF
OFF	ON	ON
ON	OFF	ON
ON	ON	ON



3-بوابة (NOT gate):

وهي بوابة لها ادخال واخراج واحد فقط تعمل على اساس ان منطق الاخراج عكس منطق الادخال.

الرمز المنطقي | الصيغة المنطقية | جدول الحقيقة



$Y = \overline{A}$

A	Y
0	1
1	0

Vin	Vout
0V	5V
5V	0V

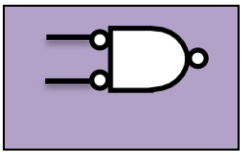
البوابات المركبة

تسمى المجموعة الثانية من البوابات المنطقية بالبوابات المركبة لانها تعتمد في عملها وتركيبها على البوابات الاساسية او لانها مشتقة من عمل البوابات الاساسية يشمل هذا النوع من البوابات اربعة بوابات وهي كمايلي:

1-بوابة (NAND gate):

تسمية هذه البوابة مشتق من (NOT+AND)وملخص عملها هو عكس عمل بوابة (AND).

الرمز المنطقي | الصيغة المنطقية | جدول الحقيقة



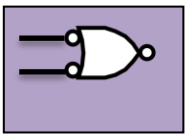
$$Y = \overline{A \cdot B}$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2-بوابة (NOR gate):

تسمية هذه البوابة مشتق من (NOT+OR)وملخص عملها هو عكس عمل بوابة (OR).

الرمز المنطقي | الصيغة المنطقية | جدول الحقيقة



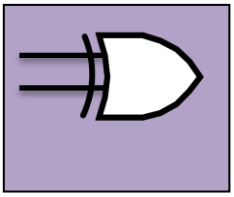
$$Y = \overline{A \cdot B}$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3-بوابة (XOR gate):

هذه البوابة تسمى ببوابة (OR) الاستثنائية ويمكن تلخيص عملها بانه نفس عمل بوابة (OR) باستثناء الاحتمال الاخير (عندما تكون الادخالات 1,1) فان الاخراج يكون على منطق (0) بدل منطق (1) كمايمكن وصف عمل (XOR) بان منطق الاخراج يكون (0) عندما تكون الادخالات متشابهة و(1) عندما تكون الادخالات مختلفة.

الرمز المنطقي | الصيغة المنطقية | جدول الحقيقة



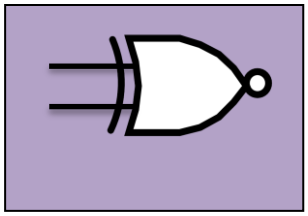
$Y = A \oplus B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4-بوابة (XNOR gate):

هذه البوابة تسمى ببوابة (NOR) الاستثنائية ويمكن تلخيص عملها بانه نفس عمل بوابة (NOR) باستثناء الاحتمال الاخير (عندما تكون الادخالات 1,1) فان الاخراج يكون على منطق (1) بدل منطق (0) اويمكن القول ان عملها عكس عمل بوابة (XOR)

الرمز المنطقي | الصيغة المنطقية | جدول الحقيقة



$Y = A \odot B$

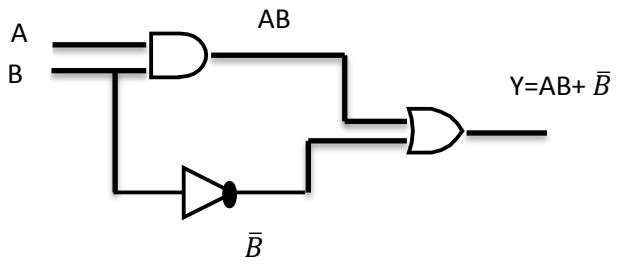
A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.2 الدوائر المنطقية (Logic Circuits):

الدائرة المنطقية هي عبارة عن مجموعة من البوابات المنطقية المتشابهة او المختلفة والمرتبطة مع بعضها البعض لتنفيذ فكرة معينة. هذه البوابات يمكن ان تكون اساسية او مركبة اوخليط منها . وياتي تصميم هذه الدوائر بعد المرور بمجموعة من الخطوات والتي سنذكر تفاصيلها في المواضيع القادمة ضمن هذا الفصل.

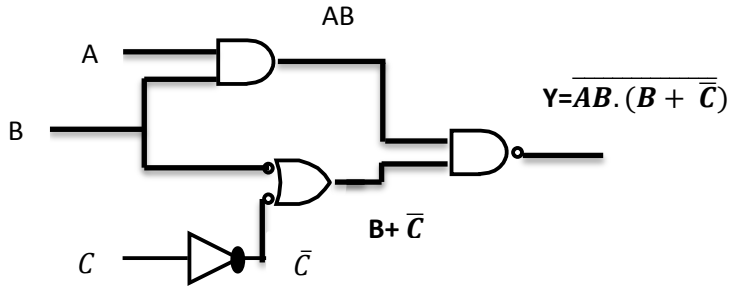
مثال على دائرة منطقية بسيطة مبين ادناه:

A	B	AB	$\overline{B}$	Y
0	**0**	**0**	**1**	1
0	**1**	**0**	**0**	0
1	**0**	**0**	**1**	1
1	**1**	**1**	**0**	1

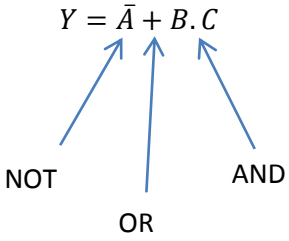


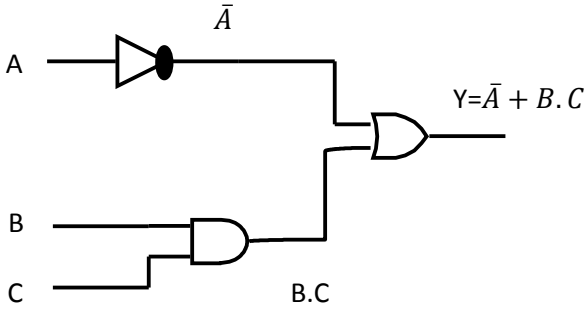
يمكن دراسة منطق الاخراج لكل دائرة منطقية بتتبع منطق الاخراج لكل بوابة في الدائرة حتى نصل الى الاخراج النهائي للدائرة وهذا يتم بكتابة جدول الحقيقة التفصيلي (جدول المتابعة) للدائرة وكمامبين في المثال السابق والمثال التالي:

A	B	C	AB	$\overline{C}$	$\overline{C}+B$	Y
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	0



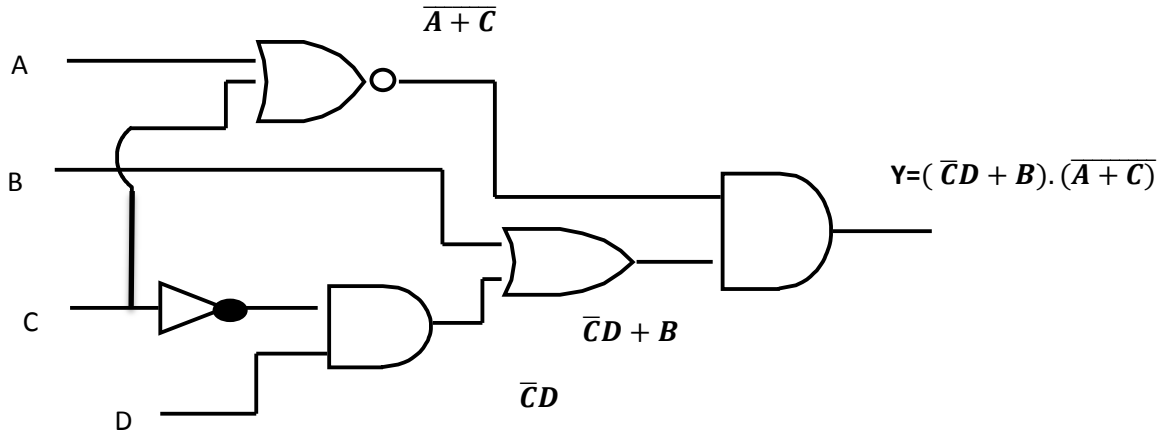
مثال3: ارسم المعادلة المنطقية التالية





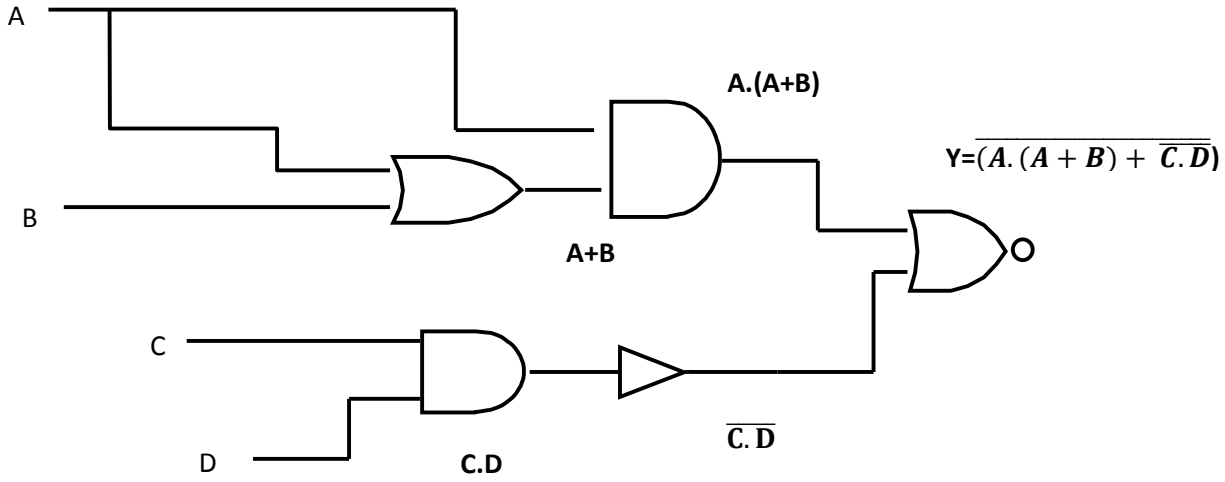
مثال4: ارسم المعادلة المنطقية التالية

$$Y = \overline{(A + C)} \,.\, (B + \bar{C}D)$$



تمارين

1- اكتب المعادلة المنطقية لكل اخراج بوابة للدائرة المنطقية التالية ثم اكتب جدول الحقيقة التفصيلي للدائرة



2- ارسم المعادلة المنطقية للصيغ المنطقية التالية:

$$\mathbf{X = \overline{A}B + A\overline{B}}$$

$$\mathbf{R = \overline{XY + Z} \,.\, \overline{XY}}$$

$$Y = \overline{\overline{(A + B)} + \overline{\overline{A}\, B}}$$

3- باستخدام جدول الحقيقة برهن ان:

$$\mathbf{AB + \overline{A}C = (A + C)(\overline{A} + B)}$$

قوانين وعلاقات الجبر البولينى (Boolean Algebra)

وضع عالم الرياضيات الانكليزي جورج بول في اواسط القرن السابع عشر قواعد لمعالجة الاعداد الثنائية وهذه القواعد سميت بالجبر البوليني والتي تعتبر اساس كل الانظمة الرقمية. ومن الامور المهمة التي نحتاج فيها تلك القوانين هي عملية تبسيط المعادلات المنطقية وتحويل الصيغ المنطقية من شكل الى اخر والتي هي خطوة مهمة من خطوات تصميم الدوائر المنطقية حيث يتم فيها اختصار عند البوابات الداخلة في التصميم.

من اهم علاقات وقوانين الجبر البوليني هي المبينة ادناه:

علاقة AND	علاقة OR	علاقة NOT
$1)\ A.0 = 0$	$5)\ A + 0 = A$	$9)\ \overline{\overline{A}} = A$
$2)\ A.1 = A$	$6)\ A + 1 = 1$	
$3)\ A.A = A$	$7)\ A + A = A$	
$4)\ A.\overline{A} = 0$	$8)\ A + \overline{A} = 1$	

$10)\ A.B = B.A$

$11)\ A + B = B + A$ } (*Commutative Laws*) قانوني الابدال

$12)\ A.(B.C) = (A.B).C$

$13)\ A + (B + C) = (A + B) + C$ } (Associative laws) قانوني التجميع

$14)\ A.(B + C) = A.B + A.C$

$15)\ A + B.C = (A + B).(A + C)$ } (Distributive laws) قانوني التوزيع

قانون دى موركان (DeMorgan's Law)

اوكستس دي موركان عالم رياضيات انكليزي اخر ، في القرن التاسع عشر قام بوضع قانون تحويل منطقي سمي بقانون دي موركان والذي كان له منفعة عظيمة في عملية تبسيط وتحوير الصيغ المنطقية. ينص قانون دي موركان على التالي:

$$1)\ \overline{A+B} = \overline{A}\,.\,\overline{B}$$

$$2)\ \overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

يمكن برهنة اي واحدة من العلاقات والقوانين اعلاه بتستخدام جدول الحقيقة وذلك باخذ احتمالات الطرفين.

مثال: برهن على صحة قانون التوزيع الاول باستخدام جدول الحقيقة:

A	B	C	B+C	الطرف الايسر A.(B+C)	$A.B$	$A.C$	الطرف الايمن Y=(A.B)+(A.C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

من الجدول اعلاه نلاحظ ان احتمالات الطرف الايسر **تساوي** احتمالات الطرف الايمن لكل قيم المتغيرات المنطقية A,B,C اذن **القانون صحيح**

1- باستخدام جدول الحقيقة برهن على صحة قانون التوزيع الثاني

2- باستخدام جدول الحقيقة برهن على صحة قانون دي مركان

2.6 تبسيط المعادلات المنطقية باستخدام قوانين وعلاقات الجبر البوليني

كماذكرنا سابقا، من الفوائد الاساسية من دراستنا لقوانين وعلاقات الجبر البوليني هي تبسيط المعادلات المنطقية وهذه العملية مهمة جدا في تصميم الدوائر الرقمية لانها تؤدي الى اختصار عدد البوابات المستخدمة في التصميم والذي بدوره يؤدي الى تقليص حجم الدائرة وتقليل الكلفة المطلوبة.

لاتوجد خطوات ثابتة لتبسيط المعادلات المنطقية بهذه الطريقة، والامثلة ادناه تبين بعض اشكال التبسيط:

مثال:

$$Y = A.(\overline{A}.B)$$

$$Y = A.\overline{A} + A.B$$ قانون التوزيع 14

$$Y = 0 + A.B$$ علاقة 4

$$Y = A.B$$ علاقة 5

نلاحظ ان المعادلة قبل التبسيط تحتاج الى ثلاثة بوابات ، بينما يمكن تحقيق نفس المنطق بالمعادلة بعد التبسيط وببوابة واحدة فقط.

مثال:

بسط المعادلة التالية باستخدام قوانين الجبر البوليني.

$$Y = AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}$$

$$Y = A\overline{C}(B + \overline{B}) + A\overline{B}C$$ قانون التوزيع 14

$$Y = A\overline{C}.1 + A\overline{B}C$$ علاقة 8

$$Y = A\overline{C} + A\overline{B}C$$ علاقة2

$$Y = A(\overline{C} + \overline{B}C)$$ قانون التوزيع 14

$$Y = A(\overline{C} + \overline{B})(\overline{C} + C)$$ قانون التوزيع 15

$$Y = A(\overline{C} + \overline{B}).1$$ علاقة 8

$$Y = A(\overline{C} + \overline{B})$$ علاقة 2

$$Y = A(\overline{C.B})$$ قانون دي موركان الاول

مثال:

بسط المعادلة التالية باستخدام قوانين الجبر البوليني.

$$Z = \overline{X + Y + \overline{XY} + \bar{\bar{X}}}$$

$$Z = \overline{X + Y}\,.\,\overline{\overline{XY} + \bar{\bar{X}}}$$

$$Z = \bar{X}.\bar{Y}\,.(XY + \bar{X}\,)$$

$$= \bar{X}.\bar{Y}\,.XY + \bar{X}.\bar{Y}\bar{X}$$

$$= \bar{X}.X\ \ \bar{Y}\,.Y + \bar{X}.\bar{X}\bar{Y}$$

$$= 0\,.0 + \bar{X}.\bar{Y}$$

$$= 0\ + \bar{X}.\bar{Y}$$

$$= \bar{X}.\bar{Y}$$

1- بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين وعلاقات الجبر البوليني وقانون دي موركان الى ابسط صورة ممكنة

$$Y = A\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,B\,\bar{C}\ + \bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}BC$$

$$F = \overline{AB(\overline{A + B}) + \bar{\bar{A}}\bar{B}}$$

$$Y = A\bar{B}\,\bar{C}\bar{D} + \overline{(A + B + \bar{C} + D)}\ + A\,\bar{B}\bar{D} + (\overline{\bar{B} + D})$$

2 -باستخدام قوانين الجبر البوليني اثبت ان:

$$(\bar{A} + B)(\bar{B} + \bar{C}) = B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}$$

2.7 كتابة المعادلات المنطقية من جدول الحقيقة :

من الخطوات المهمة في تصميم الدوائر الرقمية هي كتابة المعادلة المنطقية من جدول الحقيقة حيث ان جدول الحقيقة يمثل كافة الاحتمالات عمل الدائرة والذي تم استنتاجه من فكرة عمل الدائرة.

يمكن كتابة المعادلة المنطقية من جدول الحقيقة بطريقتين طريقة الجمع النتاجات وطريقة نتاج المجاميع

1.7.2 طريقة جمع النتاجات

في هذه الطريقة يتم الاخذ بنظر الاعتبار احتمالات الاخراج التي يكون فيها الاخراج على منطق (1) حيث تقوم بكتابة نتاج لكل احتمال ثم جمعها مع بعضها لتكوين المعادلة المنطقية.

مثال:

اكتب معادلة الاخراج (Y) من جدول الحقيقة التالي بطريقة جمع النتاجات (SOP):

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\bar{A}.B$

$A.B$

$$Y = \bar{A}.B + A.B$$

ملاحظة: يمكن كتابة المعادلة اعلاه بصيغة اخرى وهي:

$$Y(A,B) = \sum m(1,3)$$

مثال:

اكتب معادلة الاخراج (Y) من جدول الحقيقة التالي بطريقة جمع النتاجات (SOP):

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$\bar{A}\bar{B}C$

$\bar{A}BC$

$A\bar{B}\bar{C}$

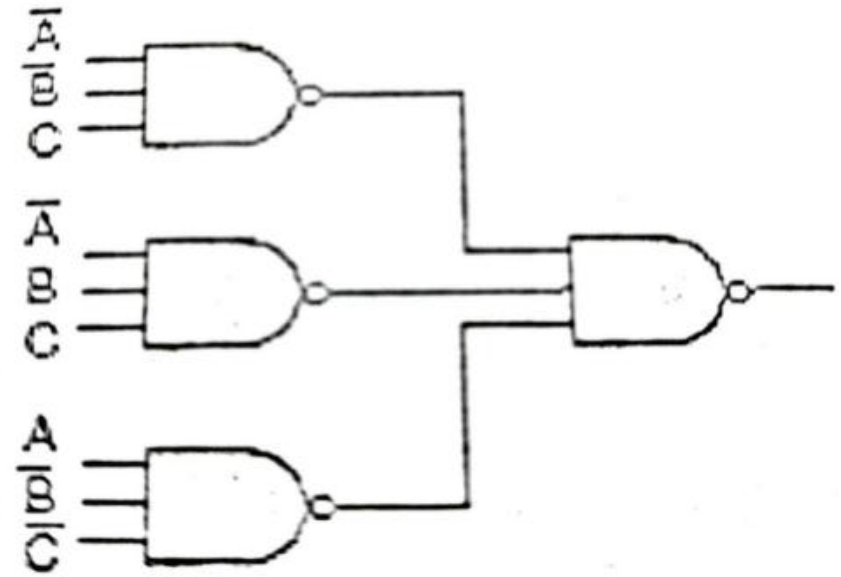
$$Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$$

ملاحظة: يمكن كتابة المعادلة اعلاه بصيغة اخرى وهي:

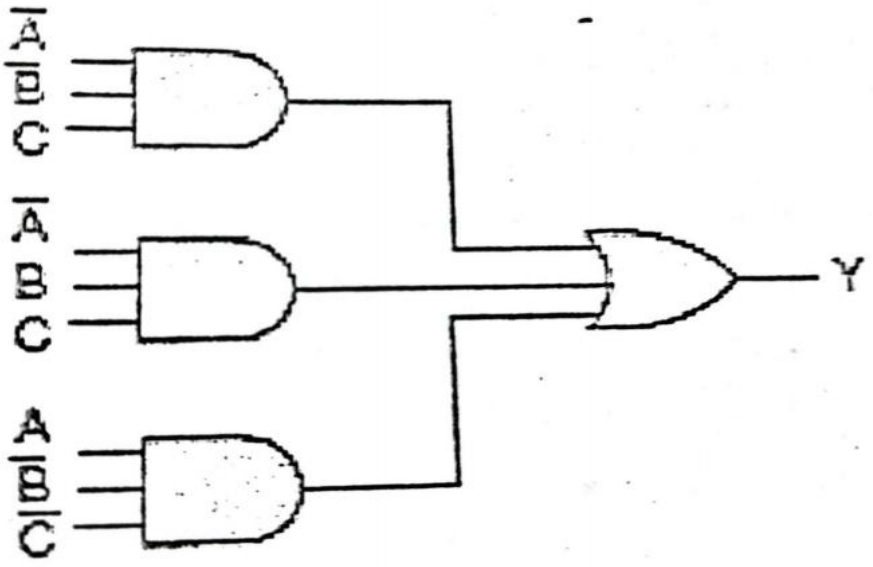
$$Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$$

$$Y(A,B,C) = \sum m(1,3,4)$$

نلاحظ من المثالين السابقين ان المعادلة المستخرجة بطريقة جمع النتاجات يمكن رسمها باستخدام بوابات (AND) كمستوى اول ثم بوابة (OR) كمستوى ثاني او باستخدام مستويين من بوابات (NAND) فقط فمثلا في المعادلة للمثال الاخير يكون الرسم كمايلي:



باستخدام طريقة (NAND-NAND)



باستخدام طريقة (AND-OR)

2.7.2 طريقة نتاج المجاميع (POS)(Product of Sums):

في هذه الطريقة يتم الاعتماد على احتمالات الاخراج التي يكون فيها الاخراج على منطق (0) حيث نقوم بكتابة مجموع لكل احتمال ثم وضع علاقة (AND) بين المجاميع المستخرجة لتكوين المعادلة المنطقية النهائية.

مثال:

اكتب معادلة الاخراج (Y) من جدول الحقيقة التالي بطريقة نتاج المجاميع (POS):

A	B	C	
0	0	0	$\boldsymbol{A+B}$
0	1	1	
1	0	0	
1	1	1	$\boldsymbol{\bar{A}+B}$

$$Y = (A + B).(\bar{A} + B)$$

ملاحظة: يمكن كتابة المعادلة اعلاه بصيغة اخرى وهي:

$$Y(A,B) = \prod M(0,2)$$

مثال:

اكتب معادلة الاخراج (Y) من جدول الحقيقة التالي بطريقة جمع النتاجات (POS):

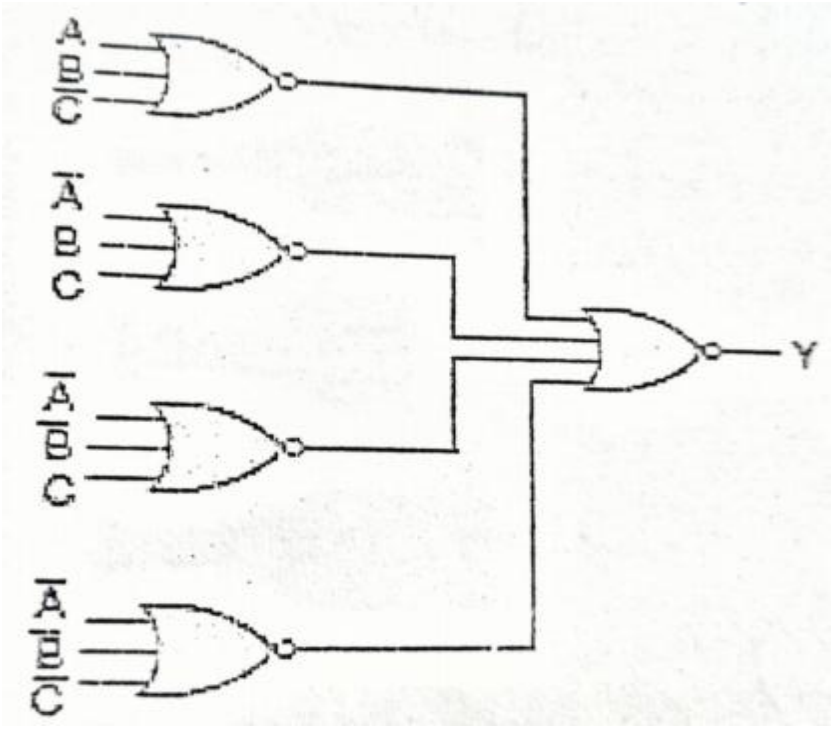
A	B	C	Y	
0	0	0	1	
0	0	1	0	$\longrightarrow \boldsymbol{A + B + \overline{C}}$
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\longrightarrow \boldsymbol{\overline{A} + B + C}$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\longrightarrow \boldsymbol{\overline{A} + \overline{B} + C}$
1	1	1	0	$\longrightarrow \boldsymbol{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}}$

ملاحظة: يمكن كتابة المعادلة اعلاه بصيغة اخرى وهي:

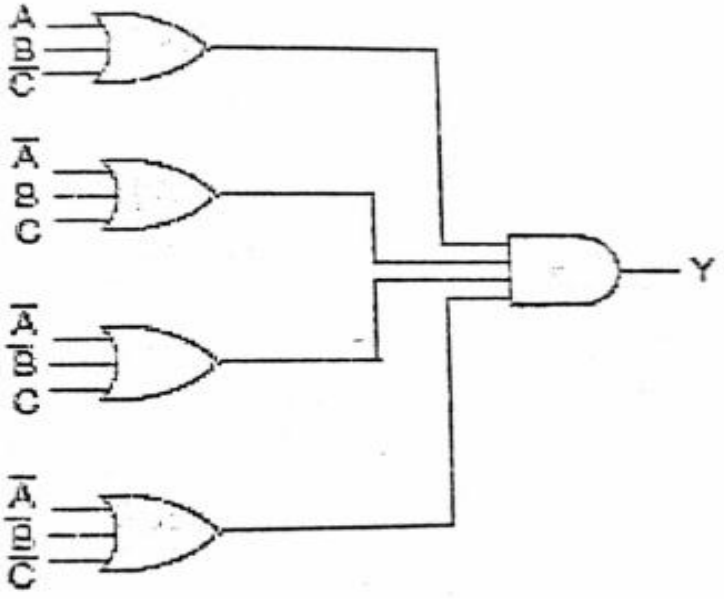
$$\boldsymbol{Y = (A + B + \overline{C}).(\overline{A} + B + C).(\overline{A} + \overline{B} + C).(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}}$$

$$Y(A, B, C) = \prod M(1,4,6,7)$$

ولرسم المعادلات المستخرجة بطريقة نتاج المجاميع (POS) يمكن استخدام بوابات (OR) كمستوى اول ثم بوابة (AND) كمستوى ثاني او باستخدام مستويين من بوابات (NOR) فقط فمثلا في المعادلة للمثال الاخير يكون الرسم كمايلي:



باستخدام طريقة (NOR-NOR)



باستخدام طريقة (OR-AND)

1 اعد كتابة المعادلة بطريقة () مرة وبطريقة () مرة اخرى

$$Y = (A + BC)(B + A\bar{C})$$

2 ارسم الصيغة التالية باستخدام بوابات (NOR) فقط.

$$Y(A, B, C) = \sum M\,(2,5,6)$$

2.8 مخطط كارنو (كارنوف)

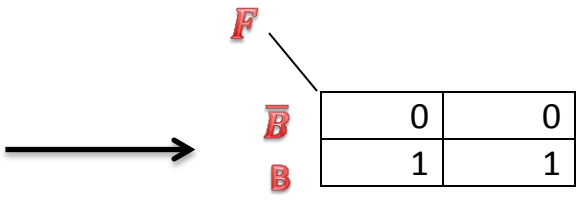
لقد بينا سابقا الحاجة لتبسيط المعادلات المنطقية وشرحنا الطريقة الجبرية باستخدام قوانين الجبر البوليني والتي يكون فيها من الصعوبة التاكد في بعض الاحيان من امكانية تبسيط المعادلة، وتتطلب ايضا الى معرفة كاملة لعلاقات وقوانين الجبر البوليني. لقد تم اكتشاف طريقة جديدة لتحويل جدول الحقيقة الى المعادلة المنطقية وتبسيطها من قبل موريك كارنو عام 1950 والتي سميت لاحقا بمخطط كارنو لاعتمادها طريقة الرسم والتخطيط لتبسيط ومعالجة المعادلات المنطقية.

يتكون مخطط كارنو من عدد من الخلايا (او المربعات) يعتمد عددها على عدد المتغيرات الداخلة في تركيبة المعادلة المنطقية. غلو فرضنا ان (N) هو عدد الخلايا و (n) هو عدد المتغيرات فستكون العلاقة بينهما هي ($N = 2^n$).

1- مخطط كارنو لمتغيرين:

لوفرضنا ان الاخراج (F) يتصرف منطقيا كما في جدول الحقيقة التالي:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

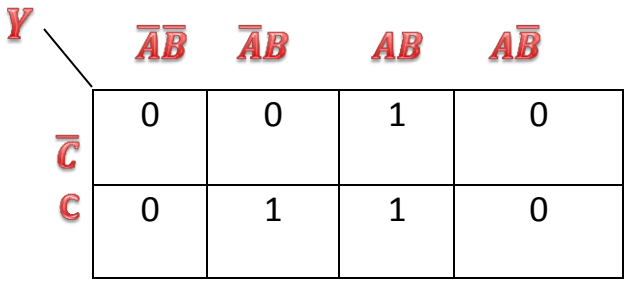


$$F(A,B) = \sum M\ (1,3)$$

2- مخطط كارنو لثلاث متغيرات:

لو فرضنا ان الاخراج () يتصرف منطقيا كمافي جدول الحقيقة التالي:

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



$$Y(A,B,C) = \sum M\ (3,6,7)$$

3- مخطط كارنو لاربعة متغيرات:

لوفرضنا ان الاخراج (F) يتصرف منطقيا كما في الصيغة المنطقيةالتالية:

$$F(A,B,C,D) = \sum M\ (1,6,7,12,15)$$

$$1 = 0001 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$$

$$6 = 0110 = \bar{A}BC\bar{D}$$

$$7 = 0111 = \bar{A}BCD$$

$$12 = 1100 = AB\bar{C}\bar{D}$$

$$15 = 1111 = ABCD$$

Y	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	AB	$A\bar{B}$
$\bar{C}\bar{D}$	0	0	1	0
$\bar{C}D$	1	0	0	0
CD	0	1	1	0
$C\bar{D}$	0	1	0	0

1.8.2 تبسيط المعادلات المنطقية باستخدام مخطط كارنو

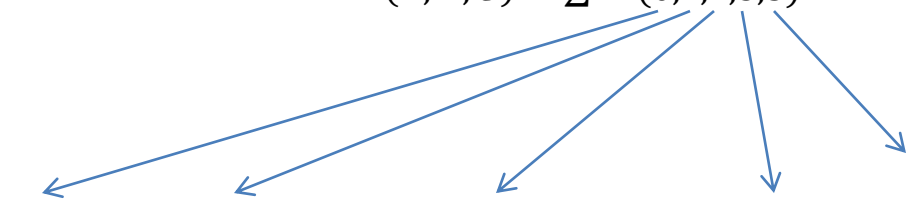
لتبسيط المعادلات المنطقية باستخدام مخطط كارنو نتبع الخطوات التالية:

1- نبحث عن المجاميع (الزوجية او الرباعية او الثمانية.....) ان وجدت وابتداءا من المجموعة الاكبر خاصية اللف (وهي تصور المخطط وكانه متصل الاطراف او بشكل كرة).
2- يسمح بتداخل المجاميع لغرض ادخال اكثر عدد من الوحدات بدلا من تركها منفردة.
3- كتابة الصيغ المنطقية للمجاميع مع ترك اي مجموعة اشتركت جميع عناصرها مع مجاميع اخرى.
4- كتابة المعادلة المنطقية النهائية المبسطة باستخدام طريقة جمع النتاجات.

مثال:

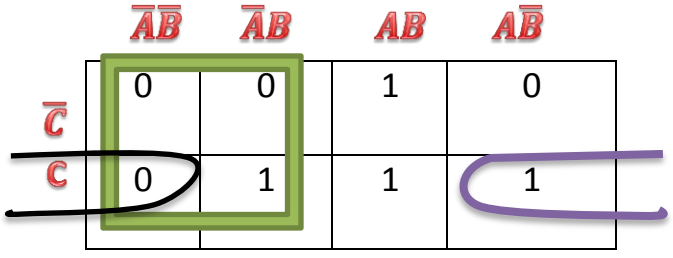
اكتب المعادلة المبسطة ل() من الصيغة التالية باستخدام مخطط كارنو:

$$Y(A,B,C) = \sum M\,(0,1,2,3,5)$$



000	001	010	011	101
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}C$

$$Y = \bar{A} + \bar{B}C$$



مثال:

اكتب المعادلة المبسطة ل(F) من الصيغة التالية باستخدام مخطط كارنو:

$$F(A,B,C,D) = \sum M\ (1,3,4,5,6,7,9)$$

$$1 = 0001 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$$

$$3 = 0011 = \bar{A}\bar{B}CD$$

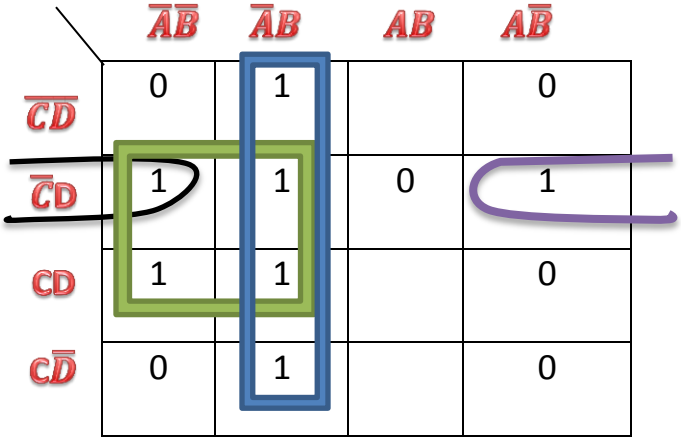
$$4 = 0100 = \bar{A}B\bar{C}\bar{D}$$

$$5 = 0101 = \bar{A}B\bar{C}D$$

$$6 = 0110 = \bar{A}BC\bar{D}$$

$$7 = 0111 = \bar{A}BCD$$

$$9 = 1001 = A\bar{B}\bar{C}D$$

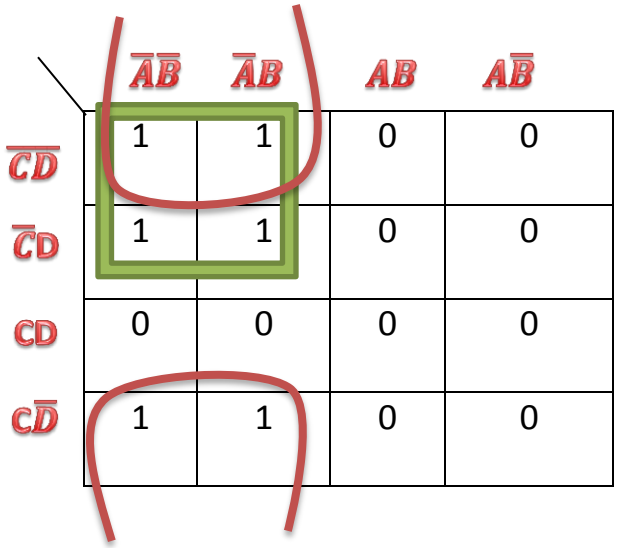


$$F = \bar{A}D + \bar{A}B + \bar{B}\bar{C}D$$

مثال:

بسط المعادلة التالية باستخدام مخطط كارنو:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D}$$



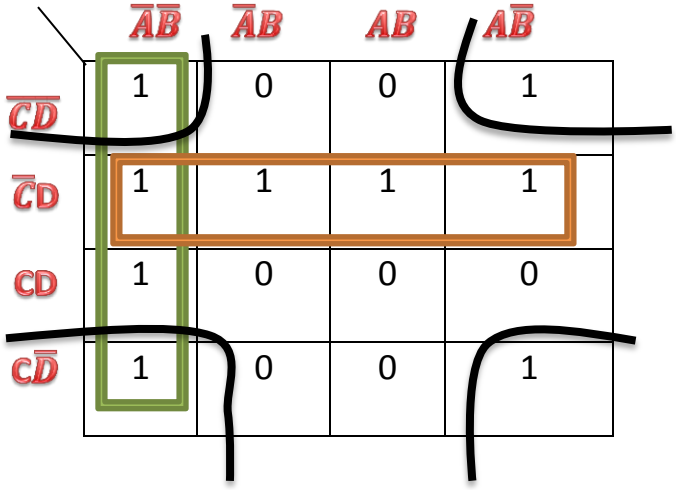
$\bar{C}\bar{D}$ \ $\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	AB	$A\bar{B}$
$\bar{C}\bar{D}$	1	1	0	0
$\bar{C}D$	1	1	0	0
CD	0	0	0	0
$C\bar{D}$	1	1	0	0

$$Y = \bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{D}$$

مثال:

بسط المعادلة التالية باستخدام مخطط كارنو:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{C}D$$



$\bar{C}\bar{D}$ \ $\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	AB	$A\bar{B}$
$\bar{C}\bar{D}$	1	0	0	1
$\bar{C}D$	1	1	1	1
CD	1	0	0	0
$C\bar{D}$	1	0	0	1

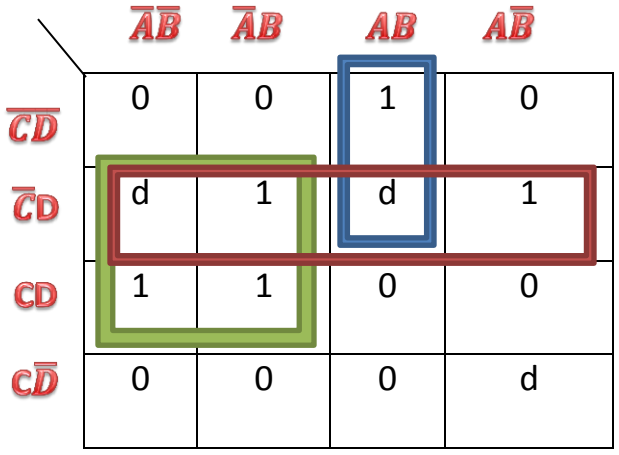
$$Y = \bar{A}\bar{B} + \bar{C}D + \bar{B}\bar{D}$$

مثال:

اكتب المعادلة المبسطة ل (F) من الصيغة التالية باستخدام مخطط كارنو:

$$F(A,B,C,D) = \sum M\ (3,5,7,9,12) + d(1,10,13)$$

ملاحظة: تعني حالات (d) حالات (don't care) او (لاتهتم) وهي احتمالات لاتمر بها الدالة (F) فلذلك يمكن اعتبارها (0) او (1) حسب حاجتنا اليها في المخطط بحيث تعطينا تبسيط اكثر.



$$F = \bar{A}D + \bar{C}D + AB\bar{C}$$

1- اكتب المعادلة المنطقية المبسطة لمخططات كارنو التالية بعد اضافة المتغيرات:

1	1	0	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0
1	0	0	1

0	1	0	0
0	1	1	1
1	1	1	0
0	0	1	0

0	0	1	1
0	1	1	0

2- اكتب المعادلة المبسطة ل (Y) لكل من الصيغ المنطقية التالية:

$$F(A,B,C,D) = \sum M\ (0,5,6,7,11,12,13,15)$$

$$Y(A,B,C) = \prod M(0,4,6,7)$$

3- بسط المعادلة التالية باستخدام مخطط كارنو:

$$Y = \bar{A}C\bar{D} + A\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{D}$$

4- اكتب المعادلة المنطقية المبسطة ل (X) من الصيغة التالية:

$$F(A,B,C,D) = \sum M\ (3,6,7,10,11,13,15) + d(2,4,8,14)$$